1. Definizione di un insieme $\mathbb{R}$ e alcune sue proprietà. La struttura $(\mathbb{R},\epsilon,=)$

Sia X un insieme infinito di "atomi": se $a \in X$ è un atomo, non si può scrivere "$x \in a$", cioé a è un elemento di X che, a sua volta, non è un insieme.

Si definiscono induttivamente i seguenti insiemi: $X_o = X$, $X_n = \mathcal{P}(\bigcup_{k=o}^{n-1} X_k)$ $\forall n \in N$ e si considera l'insieme $\bigcup_{n=o}^{\infty} X_n$. Se $X = R$ avremo:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=o}^{\infty} R_n$$

Gli elementi di $\mathbb{R}$ che appartengono ad R_o si chiamano gli "individui" di R, mentre gli elementi di $\mathbb{R}$ che appartengono a qualche R_n, $n \geq 1$, si dicono le"entità" di $\mathbb{R}$. $(\mathbb{R},\epsilon,=)$ dicesi la "superstruttura" costruita sugli atomi di R.

<u>Alcune proprietà di $\mathbb{R}$.</u>

a) ϕ è un'entità: $\phi \in \mathcal{P}(R_o) = R_1$

b) $R_p \subset R_n$ $\forall n \geq p \geq 1$: $x \in \mathcal{P}(\bigcup_{k=o}^{p-1} R_k) \Longrightarrow x \subset \bigcup_{k=o}^{p-1} R_k \Longrightarrow x \subset \bigcup_{k=o}^{p} R_k$ $\forall q \geq p-1$

cioé $x \in \mathcal{P}(\bigcup_{k=o}^{q} R_k) = R_{q+1}$, $q+1 \geq p$.

c) $\bigcup_{k=o}^{n} R_k = R_o \cup R_n$: si tenga presente che R_o è disgiunto da ogni R_n con $n \geq 1$ e la b).

d) $R_p \in R_n$ $\forall p : 0 \leq p \leq n-1$ e $\forall n \geq 1$: $R_p \subset R_o \cup R_1 \ldots \cup R_{n-1}$, $R_p \subset R_o \cup R_{n-1}$, $R_p \in \mathcal{P}(R_o \cup R_{n-1}) = R_n$

e) Se $x \epsilon y \epsilon R_n$ $n \geq 1$, $x \in R_o \cup R_{n-1}$: $y \subseteq R_o \cup R_{n-1}$ e quindi $x \in R_o \cup R_{n-1}$, se $n > 1$ si avrà $\bigcup_{x \in y} x \in R_{n-1}$: infatti $x \in R_o \cup R_{n-1} \Longrightarrow x \in R_{n-1}$, poiché $x \notin R_o$ perché non ha senso unione di individui ma unione di parti ed anche $\bigcup_{x \in Y} X \in R_{n-1}$

f) Se $x \subset y \in R_n$, $n \geq 1$, $x \in R_n$: $y \subset R_o \cup R_{n-1} \Longrightarrow x \subset R_o \cup R_{n-1}$, cioé $x \epsilon R_n$

g) Se $(x_1,x_2\dots x_h) \in y \in R_n$ [1], $n \geq 1$, $x_1 \in R_o \cup R_{n-1},\dots,x_h \in R_o \cup R_{n-1}$,

in particolare se b, relazione binaria, $\in \mathbb{R}$ $n \geq 1$, dom b $=\{x:(\exists y)(x,y)\in b\}\in\mathbb{R}$

e anche rangb $=\{y:(\exists x)(x,y)\in b\}\in\mathbb{R}$: infatti, per e) $(x_1,x_2\dots x_h)\in R_o \cup R_{n-1}$

cioé $\{\{x_1\},\{x_1,(x_2\dots x_n)\}\} \in R_o \cup R_{n-1} = R_o \cup \mathcal{S}(R_o \cup R_{n-2})$, cioé

$\{x_1,(x_2\dots x_h)\} \in R_o \cup R_{n-2} \Longrightarrow x_1 \in R_o \cup R_{n-3} \subset R_o \cup R_1$ ed anche

$(x_2\dots x_h) \in R_o \cup R_{n-3} \subset R_o \cup R_{n-1}$ [2] e quindi $x_2 \in R_o \cup R_{n-1},\dots,x_h \in R_o \cup R_{n-1}$

Se $(x_1,x_2) \in b \in R_n$ $n \geq 1$, $x_1 \in R_o \cup R_{n-1}$ e $\{x_1:(\exists x_2)(x_1,x_2)\in b\} \subset R_o \cup R_{n-1}$

e quindi $\{x_1:\dots\dots\} \in \mathcal{S}(R_o \cup R_{n-1}) = R_n$, cioé dom b $\in \mathbb{R}$. Analogamente per rangb.

h) Se x è un sottoinsieme finito di $\mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$; $x = \{x_1,x_2\dots x_n\}$ con $x_i\in\mathbb{R}$,

tutti gli $x_i \in \bigcup_{k=o}^{p} R_k$ cioé $x \subset \bigcup_{k=o}^{p} R_k \Longrightarrow x \in \mathcal{S}(R_o \cup R_p) = R_{p+1}$

i) Se $x \in R_n$ $n \geq 1$, $\mathcal{S}(x) \in R_{n+1}$; $x \in \mathcal{S}(R_o \cup R_{n-1}) \Longrightarrow x \subset R_o \cup R_{n-1} \Longrightarrow$

$\mathcal{S}(x) \subset R_n \Longrightarrow \mathcal{S}(x) \subset R_o \cup R_n$, $\mathcal{S}(x) \in R_{n+1}$.

l) Se $x_1,x_2\dots x_h \in \mathbb{R}$, $(x_1,x_2\dots x_h) \in \mathbb{R}$ e $X_1 \times X_2 \dots \times X_h \in \mathbb{R}$. In particolare ogni relazione Φ, considerata come sottoinsieme di un prodotto cartesiano, $\in \mathbb{R}$ quando domini e rango $\in \mathbb{R}$ [3].

---

(1) Come si vedrà in l) se $x_1,\dots x_h\in R_o$, $(x_1,x_2,\dots x_h)\in R_{2(h-1)}$, per cui n deve essere, almeno, 2h-1.

(2) $\{\{x_1\},\{x_2\dots x_h)\}\} \in \mathcal{S}(R_o \cup R_{n-2}) \Longrightarrow \{\{x_1\},\{x_1(x_2\dots x_h)\}\} \subset R_o \cup R_{n-2} \Longrightarrow$

$\{x_1,(x_2,\dots,x_h)\} \in R_o \cup R_{n-2} \Longrightarrow \{x_1,(x_2\dots x_h)\} \in R_{n-2} = \mathcal{S}(R_o \cup R_{n-3}) \Longrightarrow$

$\{x_1,(x_2\dots x_h)\} \subset R_o \cup R_{n-3} \Longrightarrow x_1 \in R_o \cup R_{n-3}$ e $(x_2\dots x_h) \in R_o \cup R_{n-3}$

(3) $\mathrm{dom}_i\Phi = \{x_i : \exists\, x_1,x_2\dots x_{i-1},x_{i+1}\dots x_h$ con $(x_1\dots x_h) \in \Phi\}$

rang $\Phi = \{x_h : \exists\, x_1,x_2\dots x_{h-1}$ con $(x_1\dots x_h) \in \Phi\}$

Anche le funzioni $\in \mathbb{R}$ se dominio e codominio $\in \mathbb{R}$, infatti $(x,y,\ x\,R\,y) \in \mathbb{R}$.

Se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, per h) $\{x_1\}$, $\{x_1,x_2\} \in \mathbb{R}$ e quindi $\{\{x_1\},\{x_1,x_2\}\}=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}$. Si noti che se, per es., $x_1 \in R_p$, $x_2 \in R_n$, $n \geq p \geq 0$, $\{x_1\} \in R_{p+1}$ e $\{x_1,x_2\} \in R_{n+1}$ per h) ed allora $\{\{x_1\},\{x_1,x_2\}\} = (x_1,x_2) \in R_{n+2}$, per la stessa h). In particolare se $n = p = 0$, $(x_1,x_2) \in R_2$ cioé $R^2 \subset R_2$. Analogamente se $x_1,x_2,x_3 \in R_o$, $(x_1,x_2,x_3) = ((x_1,x_2),x_3) \in R_4$ poiché $(x_1,x_2)\in R_2$ e $x_3 \in R_o$, cioé $R^3 \subset R_4 \ldots R^h \subset R_{2(h-1)}$.

La formula è vera $\forall h \geq 1$. Infatti: $(x_1,\ldots x_{h+1}) = ((x_1\ldots x_h),x_{h+1})\in R_{2(h-1)+2}=R_{2h}$.

Si osservi che $R^h \subset R_{2(h-1)} \Longrightarrow R^h \in \mathcal{S}(R_{2(h-1)}) \subset \mathcal{S}(R_o \cup R_{2(h-1)})=R_{2h-1}$ cioé $R^h \in R_{2h-1}$.

Facciamo vedere che $x_1 \times x_2 \in \mathbb{R}$. Se $x_1 \in R_p$, $x_2 \in R_n$ $p \geq 1$, $n \geq 1$; x_1 e $x_2 \in R_n$ se $n \geq p$, sicché x_1 e $x_2 \in R_n \in R_{n+1}$ e per la e) $X_1 \cup X_2 \in R_n$ ed anche $\mathcal{S}(x_1 \cup x_2) \in \mathbb{R}$ per la i); se $x_1 \in X_1$ e $x_2 \in X_2$, x_1 e $x_2 \in X_1 \cup X_2$ e quindi $\{x_1\}$ e $\{x_1,x_2\}\in \mathcal{S}(X_1 \cup X_2)$ e ciò vuol dire che $(x_1,x_2) =$

$= \{\{x_1\},\{x_1,x_2\}\} \in \mathcal{S}(\mathcal{S}(X_1 \cup X_2))$: in definitiva, $(x_1,x_2) \in X_1 \times X_2$ $\Longrightarrow (x_1,x_2) \in \mathcal{S}(\mathcal{S}(X_1 \cup X_2))$ ossia $X_1 \times X_2 \subset \mathcal{S}(\mathcal{S}(X_1 \cup X_2)) \in \mathbb{R} \Longrightarrow X_1 \times X_2 \in \mathbb{R}$ per f).

Si osservi che la formula $R^h \subset R_{2(h-1)}$ può essere stabilita come applicazione della formula ora ottenuta:

$$R^2 = R \times R \subset \mathcal{S}(\mathcal{S}(R \cup R) = \mathcal{S}(R_1) \subset \mathcal{S}(R_o \cup R_1) = R_2.$$
$$R^3 = R^2 \times R \subset \mathcal{S}(\mathcal{S}(R \cup R_1^2)) \subset \mathcal{S}(\mathcal{S}(R \cup R_2) = \mathcal{S}(R_3) \subset R_4. \ldots$$

Supposta vera con l'indice h, è vera con l'indice h+1 : $R^h \subset R_{2(h-1)} \Longrightarrow R^{h+1} \subset R_{2h}$:

$R^{h+1} = R \times R^h \subset \mathcal{S}(\mathcal{S}(R \cup R^h) \subset \mathcal{S}(\mathcal{S}(R \cup R_{2(h-1)}) \subset \mathcal{S}(R_{2h-1}) \subset \mathcal{S}(R_o \cup R_{2h-1}) = R_{2h}$.