$\tilde{\Delta}$ è la generalizzazione del laplaciano reale $\Delta$ di G. de Rham definito sui tensori antisimmetrici.

$\tilde{\Delta}$ conserva la simmetria o antisimmetria eventuale di $T$, commuta con la contrazione ed è autoaggiunto.

Essendo $X$ dotata di una struttura kähleriana, allora si prova (cfr. [5]) che

$$\Delta = 2\Box = 2\bar{\Box} .$$

Su $X$ si può quindi definire per i tensori $T$ del tipo (p,o) l'operatore $\tilde{\Box}$ :

$$(\tilde{\Box} T)_{\alpha_1 \cdots \alpha_p} = -g^{\rho\bar{\tau}} \nabla_{\bar{\tau}} \nabla_{\rho} T_{\alpha_1 \cdots \alpha_p} + R_{\alpha_k \bar{\tau}} \, g^{\bar{\tau}\rho} T_{\alpha_1 \cdots \rho \cdots \alpha_p} +$$

$$- R_{\alpha_k \bar{\tau} \alpha_\ell \bar{\nu}} \, g^{\bar{\tau}\rho} g^{\bar{\nu}\sigma} T_{\alpha_1 \cdots \rho \cdots \sigma \cdots \alpha_p} ,$$

$\tilde{\Box}$ è la generalizzazione del laplaciano complesso $\bar{\Box}$ definito sui tensori (p,o) antisimmetrici.

Con $\Theta$ denoteremo il fascio dei germi dei campi di vettori olomorfi tangenti a $X$, e con $H^q(X,\Theta)$ $(q = 1,\ldots,n)$ i gruppi di coomologia con coefficienti in $\Theta$ (per maggiori dettagli si rinvia a [1] cap.2).

Sia $M$ una varietà (connessa) e $\mathcal{V}$ un fibrato differenziabile su $M$ con proiezione $\pi : \mathcal{V} \to M$ e tale che ogni fibra $V_t = \pi^{-1}(t)$ $(t \in M)$ di $\mathcal{V}$ sia una varietà analitica complessa n-dimensionale, la cui struttura complessa è compatibile con la struttura differenziabile di $V_t$ indotta dalla struttura differenziabile di $\mathcal{V}$.

Lo spazio fibrato $\mathcal{V} = \{V_t / t \in M\}$ lo diremo <u>famiglia differenziabile di varietà complesse n-dimensionali</u>, se: per ogni punto $p \in \mathcal{V}$ esiste un intorno $U$ di $p$ e un omeomorfismo differenziabile $h$ di $U$ in $\mathbb{C}^n \times \pi(U)$ tale che per ogni $t \in \pi(U)$, $h_t = h|_{U \cap V_t}$ è una applicazione biolomorfa di $U \cap V_t$ in $\mathbb{C}^n \times \{t\}$.

Riferendoci a un punto base $o \in M$, la varietà complessa $V_t = \pi^{-1}(t)$, $t \in M$, la diremo una deformazione di $V_o = \pi^{-1}(o)$.

Una famiglia differenziabile $\mathcal{V} \xrightarrow{\pi} M$ di varietà complesse n-dimensionali la diremo banale, se per qualche punto $o \in M$ esiste una applicazione differenziabile di $\mathcal{V} \longrightarrow V_o = \pi^{-1}(o)$ che applica ogni fibra $V_t = \pi^{-1}(t)$, $t \in M$, biolomorficamente in $V_o$; la diremo invece localmente banale in $o \in M$, se esiste un intorno $N$ di $o$ in $M$, tale che la famiglia $\pi^{-1}(N) \longrightarrow N$ è banale.

Rigidità di varietà hermitiane compatte.

Il seguente lemma è dovuto a Calabi e Vesentini (cfr. [1] pag. 487).

LEMMA . Sia $X$ varietà kähleriana compatta di Einstein avente $\dim_{\mathbb{C}} X = n$. Siano $\lambda_1 \cdots \lambda_N$ $(N = \frac{1}{2} n(n+1))$ i valori propri in ogni punto di $X$ della trasformazione lineare

$$Q : \xi_{\alpha\beta} \longrightarrow R^{\rho}{}_{\alpha\beta}{}^{\sigma}\, \xi_{\rho\sigma} \qquad (1)$$

operante sui tensori simmetrici di tipo $(2,0)$.

Supponiamo $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_N$ e sia $\lambda = \inf\{\lambda_1(x) : x \in X\}$.
Se $R$ denota la curvatura scalare costante, abbiamo $R \geq n(n+1)\lambda$ ed inoltre

(a) se $\lambda \geq 0$ e $R > 0$, allora $H^q(X,\Theta) = \{0\}$ per ogni $q > 0$;

(b) se $\lambda < 0 < R$ e $R+n\lambda > 0$, allora $H^q(X,\Theta) = \{0\}$ per ogni

$$q > -\frac{n\lambda}{R+n\lambda} ;$$

(c) se $R < 0$, allora $0 < \frac{R}{\lambda} \leq n(n+1)$ e $H^q(X,\Theta) = \{0\}$

per ogni $q < \dfrac{R}{n\lambda} - 1$ .

OSSERVAZIONE 1. Il gruppo $H^q(X,\Theta)$ è legato con le deformazioni della struttura complessa di X. Infatti quando per una varietà complessa compatta X si ha $X^1(X,\Theta) = \{0\}$, allora per un criterio di Frölicher e Nijenhuis (cfr. [5], pag. 45) la struttura complessa di X è localmente rigida, cioé ogni famiglia $\mathcal{V} \xrightarrow{\pi} M$ di varietà complesse n-dimensionali $V_t = \pi^{-1}(t)$, $t \in M$, con fibra $V_o = \pi^{-1}(0)$ analiticamente isomorfa a X, è localmente banale in 0.

Per varietà hermitiane compatte, proviamo il seguente teorema di rigidità.

TEOREMA . Sia X varietà kähleriana compatta di Einstein n-dimensionale, con curvatura scalare R, avente

$$\lambda > \frac{R}{2n} \quad \text{se} \quad R < 0, \qquad \lambda > -\frac{R}{2n} \quad \text{se} \quad R > 0 > \lambda.$$

Sia X' varietà complessa compatta hermitiana m-dimensionale tale che

(i) X' e X siano isospettrali per il laplaciano $\square_{(p,q)}$ con $(p,q) = (0,0),(1,0),(0,1),(0,2)$.

(ii) l'operatore Q' (operatore (1) riferito a X') ammetta come autosoluzione relativa a $\lambda_1'$ un tensore $\eta = (\eta_{\alpha\beta})$ il quale verifichi per ogni $x \in X'$ la condizione:

$$[(\tilde{\square}\, \eta)_{\alpha\beta}\, \bar{\eta}_{\alpha\beta}]_{Re} \geq \left(\frac{R}{n} + 2\lambda\right)\eta_{\alpha\beta}\bar{\eta}_{\alpha\beta} - [(g^{\rho\bar{\tau}}\nabla_{\bar{\tau}}\nabla_{\rho}\eta_{\alpha\beta})\bar{\eta}_{\alpha\beta}]_{Re}^{(1)} . \qquad (2)$$

In queste ipotesi si prova che X' è localmente rigida.

DIMOSTRAZIONE. Intanto dalle ipotesi fatte su $\lambda$, segue facilmente che, X ha struttura complessa localmente rigida.

---

(1) Se z è un numero complesso con $[z]_{Re}$ indicheremo la parte reale di z.

Infatti

se $\lambda > \frac{R}{2n}$ $(R < 0)$, dal punto (c) del lemma, abbiamo $H^1(X,\Theta) = \{0\}$;

se $\lambda > -\frac{R}{2n}$ $(R > 0 > \lambda)$, allora è anche $\lambda > -\frac{R}{n}$, quindi dal punto (b) del lemma abbiamo $H^1(X,\Theta) = \{0\}$.

Pertanto dall'osservazione 1 segue che $X$ è localmente rigida.

La matrice hermitiana su $X'$ sia data, in coordinate locali $(z^\alpha)$, da

$$ds^2 = 2\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} g_{\alpha\bar\beta}\,dz^\alpha dz^{\bar\beta} \; ;$$

a $ds^2$ possiamo associare la (1,1) forma fondamentale $\omega = \sqrt{-1}\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} g_{\alpha\bar\beta}\,dz^\alpha \wedge dz^{\bar\beta}$.

Essendo la varietà hermitiana $X'$ isospettrale a $X$ per $\square_{(0,0)}$, $\square_{(1,0)}$ e $\square_{(0,1)}$, con $X$ dotata di metrica kähleriana, dal corollario 4.3 di [3] (pag. 256) segue che la (1,1) forma $\omega$ è chiusa ossia $X'$ è kähleriana. Quindi $X$ e $X'$ sono varietà compatte kähleriane aventi stesso spettro per $\square_{(0,0)}$, $\square_{(0,1)}$ e $\square_{(0,2)}$, con $X$ di Einstein, pertanto applicando il corollario 4.3 di [2] (pag. 201) segue che anche $X'$ è di Einstein con curvatura scalare $R'$ uguale a quella di $X$. Naturalmente $m = \dim_{\mathbb{C}} X' = \dim_{\mathbb{C}} X = n$, in quanto $X$ e $X'$ avendo stesso spettro per $\square_{(0,0)}$ avranno stesso sviluppo asintotico.

Indicando con $R_{\alpha\bar\tau}$ e $R_{\alpha\bar\tau\beta\bar\nu}$ rispettivamente le componenti del tensore di Ricci e del tensore di curvatura di $X'$, il tensore $\tilde\square\eta$ simmetrico di tipo (2,0) è dato da:

$$(\tilde\square\eta)_{\alpha\beta} = -g^{\rho\bar\tau}\,\nabla_{\bar\tau}\nabla_\rho\eta_{\alpha\beta} + R_{\alpha\bar\tau}\,g^{\bar\tau\rho}\eta_{\rho\beta} + R_{\beta\bar\tau}\,g^{\rho\bar\tau}\eta_{\alpha\rho}$$

$$- R_{\alpha\bar\tau\beta\bar\nu}\,g^{\bar\tau\rho}\,g^{\bar\nu\sigma}\eta_{\rho\sigma} - R_{\beta\bar\tau\alpha\bar\nu}\,g^{\bar\tau\rho}g^{\bar\nu\sigma}\eta_{\rho\sigma} .$$

Essendo $X'$ varietà kähleriana di Einstein $n$-dimensionale con curvatura scalare $R$, il tensore di Ricci $R_{\alpha\bar{\beta}}$ verifica $R_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{R}{2n} g_{\alpha\bar{\beta}}$, pertanto

$$(\tilde{\Box} \eta)_{\alpha\beta} = - g^{\rho\bar{\tau}} \nabla_{\bar{\tau}} \nabla_{\rho} \eta_{\alpha\beta} + \frac{R}{2n} g_{\alpha\bar{\tau}} g^{\bar{\tau}\rho} \eta_{\rho\beta} + \frac{R}{2n} g_{\beta\bar{\tau}} g^{\rho\bar{\tau}} \eta_{\alpha\rho} +$$

$$- 2R_{\alpha\ \ \beta}^{\ \ \rho\ \ \sigma} \eta_{\rho\sigma} = - g^{\rho\bar{\tau}} \nabla_{\bar{\tau}} \nabla_{\rho} \eta_{\alpha\beta} + \frac{R}{n} \eta_{\alpha\beta} + 2 R^{\rho\ \ \sigma}_{\ \ \alpha\beta} \eta_{\rho\sigma} .$$

Dalla condizione (2), per ogni $x \in X'$, abbiamo:

$$\frac{R}{n} \eta_{\alpha\beta}\bar{\eta}_{\alpha\beta} - [(g^{\rho\bar{\tau}} \nabla_{\bar{\tau}} \nabla_{\rho} \eta_{\alpha\beta})\bar{\eta}_{\alpha\beta}]_{Re} + 2\lambda\, \eta_{\alpha\beta}\bar{\eta}_{\alpha\beta} \leq [(\tilde{\Box}\eta)_{\alpha\beta}\, \bar{\eta}_{\alpha\beta}]_{Re} =$$

$$= -[(g^{\rho\bar{\tau}} \nabla_{\bar{\tau}} \nabla_{\rho} \eta_{\alpha\beta})\bar{\eta}_{\alpha\beta}]_{Re} + \frac{R}{n} \eta_{\alpha\beta}\bar{\eta}_{\alpha\beta} + 2[(R^{\rho\ \ \sigma}_{\ \ \alpha\beta} \eta_{\rho\sigma})\bar{\eta}_{\alpha\beta}]_{Re}$$

ossia

$$[(R^{\rho\ \ \sigma}_{\ \ \alpha\beta} \eta_{\rho\sigma})\bar{\eta}_{\alpha\beta}]_{Re} \geq \lambda\, \eta_{\alpha\beta}\bar{\eta}_{\alpha\beta} . \qquad (3)$$

D'altronde $R^{\rho\ \ \sigma}_{\ \ \alpha\beta} \eta_{\rho\sigma} = Q'(\eta_{\alpha\beta}) = \lambda'_1 \eta_{\alpha\beta}$ per ogni $x \in X'$, per cui la (3) diventa $\lambda'_1 \eta_{\alpha\beta}\bar{\eta}_{\alpha\beta} \geq \lambda\, \eta_{\alpha\beta}\, \bar{\eta}_{\alpha\beta}$ per ogni $x \in X'$, ed essendo $\eta_{\alpha\beta}\, \bar{\eta}_{\alpha\beta} > 0$ , ne segue che

$$\lambda' = \inf\{\lambda'_1 (x) : x \in X'\} \geq \lambda .$$

Pertanto la condizione (2) geometricamente significa che lo spettro di $Q'$ si trova dopo $\lambda$.

Essendo $\lambda' \geq \lambda$ , abbiamo:

se $\lambda > \frac{R}{2n}$ $(R < 0)$, anche $\lambda' > \frac{R}{2n}$ e quindi dal punto (c) del lemma $H^1(X',\Theta') = \{0\}$ cioé $X'$ è localmente rigida; se $\lambda > - \frac{R}{2n}(R > 0 > \lambda)$, può aversi $\lambda' \geq 0$ $(R > 0)$ oppure $\lambda' > - \frac{R}{2n}$ $(R > 0 > \lambda')$, quindi dal punto (a) oppure dal punto (b) del lemma segue che $X'$ è localmente rigida.

C.V.D.

<u>OSSERVAZIONE 2</u>. In particolare se il tensore simmetrico $\eta = (\eta_{\alpha\beta})$ è a derivata covariante nulla, affinché si verifichi la condizione (2) del Teorema è sufficiente che $\eta$ sia anche autosoluzione di $\tilde{\square}$ con valore proprio $\mu \geq (\frac{R}{n} + 2\lambda)$ .

B I B L I O G R A F I A

[1] E. Calabi-E.Vesentini — *On compact, locally symmetric kähler manifolds* - Ann. of Math.71,472-507(1960).

[2] H. Donnelly — *Minakshisundaram's coefficients on kähler manifolds* - Proc. of Symp.in Pure Math. 27,195-203 (1975).

[3] P. Gilkey — *Spectral geometry and the kähler condition for complex manifolds*. Inv. Math. 26, 231-258 (1974).

[4] A.Lichnerowicz — *Propagateurs et commutateurs* - Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sc.n°10 Paris 1961.

[5] J. Morrow - K. Kodaira — *Complex manifolds* - Holt-Rinehart and Winston New York 1971.

Approvato su proposta del
Prof. E. Vesentini (Scuola
Normale Superiore di Pisa)