ABSTRACT. - *An eigenvalue problem concerning a Fredholm integral equation of second kind, with a symmetric kernel of "closed cycle" is considered. The Rayleigh Ritz procedure and the orthogonal invariants method are applied for determining rigorous bounds for the eigenvalues.*

Accettato per la pubblicazione sulla Rivista "Calcolo".

Calcolo degli autovalori di una equazione integrale di Fredholm di 2^a specie a nucleo simmetrico del "ciclo chiuso".

di Maria Laura Leuzzi (Lecce)

Il presente lavoro concerne il calcolo degli autovalori di una equazione integrale di Fredholm di 2^a specie a nucleo simmetrico del "ciclo chiuso", secondo la locuzione di Vito Volterra.

Precisamente si consideri una funzione reale $k(t)$ della variabile reale t, la quale sia continua nell'intervallo $-a \leq t \leq a$ ed ivi funzione pari della variabile t.

Posto $K(x,y) = k(x-y)$, l'equazione integrale di Fredholm considerata è la seguente:

$$(1) \qquad \int_0^a K(x,y)\, u(y)\, dy = \mu\, u(x).$$

I.Stakgold [1], studiando tale problema, si propone il calcolo degli autovalori applicando il ben noto metodo di Alexander Weinstein e costruisce, a tal fine, il problema di base indispensabile per la applicazione del metodo stesso.

Si è ritenuto che la applicazione del procedimento di Stakgold al calcolo degli autovalori per la equazione (1) non sia conveniente per i motivi che si vengono ad illustrare.

E' intanto, ovvio che, mediante una traslazione sull'asse reale, la quale lascia immutato il nucleo $K(x,y)$, ci si può ricondurre dall'intervallo (o,a) all'intervallo $(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$, cioé si può scrivere la (1) al modo seguente:

---

(1) Cfr. [8].

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} K(x,y)\,u(y)\,dy = \mu\,u(x). \tag{2}$$

Si ha:

$$\mathcal{L}^2(-\frac{a}{2},\frac{a}{2}) = \mathcal{L}^2_0(-\frac{a}{2},\frac{a}{2}) \oplus \mathcal{L}^2_1(-\frac{a}{2},\frac{a}{2}),$$

essendo $\mathcal{L}^2(-\frac{a}{2},\frac{a}{2})$ l'ordinario spazio di Hilbert reale delle funzioni di quadrato sommabile in $(-\frac{a}{2},\frac{a}{2})$, $\mathcal{L}^2_0(-\frac{a}{2},\frac{a}{2})$ il sottospazio di $\mathcal{L}^2(-\frac{a}{2},\frac{a}{2})$ costituito da tutte le funzioni pari ed $\mathcal{L}^2_1(-\frac{a}{2},\frac{a}{2})$ il sottospazio delle funzioni dispari.

Si indichi con K l'operatore al primo membro della (2). Sussiste il seguente teorema:

I. - I sottospazi $\mathcal{L}^2_0(-\frac{a}{2},\frac{a}{2})$ e $\mathcal{L}^2_1(-\frac{a}{2},\frac{a}{2})$ sono sottospazi invarianti per l'operatore K ".

Basta dimostrare che $\mathcal{L}^2_0(-\frac{a}{2},\frac{a}{2})$ è sottospazio invariante per l'operatore K. Infatti, com'è noto (1), se il sottospazio $\mathcal{L}^2_0(-\frac{a}{2},\frac{a}{2})$ è invariante per l'operatore K, tale è anche $\mathcal{L}^2_1(-\frac{a}{2},\frac{a}{2})$, complemento ortogonale di $\mathcal{L}^2_0(-\frac{a}{2},\frac{a}{2})$.

---

(1) Cfr. [2], teorema XIV, pag. 75.

Occorre, quindi, dimostrare che, se $\phi(x) \in \mathscr{L}_0^2(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$, posto $\psi(x) = K[\phi(x)]$, riesce $\psi(x) \in \mathscr{L}_0^2(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$, cioé $\psi(x) = \psi(-x)$.

Infatti, posto $y = -t$, per la parità della $\phi(x)$, si ha:

$$\psi(x) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} k(x-y)\ \phi(y)\ dy = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} k(x+t)\ \phi(t)\ dt.$$

D'altra parte, per la parità delle funzioni k e ϕ, riesce:

$$\psi(-x) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} k(-x-t)\ \phi(t)\ dt = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} k(x+t)\ \phi(t)\ dt.$$

La tesi del teorema è, pertanto, acquisita.

Si indichi con P_0 il proiettore ortogonale di $\mathscr{L}^2(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ su $\mathscr{L}_0^2(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ e si ponga $P_1 = I - P_0$, essendo I l'operatore identità.

Si ponga, inoltre

$$K_i = P_i\ K\ P_i \qquad (i = 0,1)$$

$$S_i = \mathscr{L}_i^2(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}) \qquad (i = 0,1).$$

Dal teorema precedente segue(1) che:

(1) Cfr. [2], teorema XV, pag. 75.

II. - "Considerati i due problemi di autovalori

$$(2_0) \qquad K_0 u = \mu u \qquad u \in \mathcal{L}_0^2 \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right),$$

$$(2_1) \qquad K_1 u = \mu u \qquad u \in \mathcal{L}_1^2 \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right),$$

le due successioni degli autovalori dei problemi (2_0) e (2_1) (nelle quali ogni autovalore è ripetuto un numero di volte pari alla rispettiva molteplicità) costituiscono la successione di tutti gli autovalori (ciascuno contato un numero di volte pari alla sua molteplicità), del problema (2)".

E' facile constatare che:

III. - "I due operatori K_0 e K_1 hanno le seguenti rappresentazioni integrali:

$$(3_0) \qquad K_0 u = P_0 K P_0 u = \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \{K(x,y)+K(x,-y)\}\, u(y)\, dy \qquad u \in \mathcal{L}_0^2\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right),$$

$$(3_1) \qquad K_1 u = P_1 K P_1 u = \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \{K(x,y)-K(x,-y)\}\, u(y)\, dy \qquad u \in \mathcal{L}_1^2\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)".$$

I teoremi dimostrati costituiscono un evidente progresso nel problema del calcolo degli autovalori del problema (2) in quanto - come è ben noto - la conoscenza di spazi invarianti in problemi di approssimazione lineare consente - disponendo di sistemi per il calcolo automatico atti a fornire la approssimazione fino all'ordine n - di spingere la approssimazione stessa fino all'ordine $p \times n$, se p è il numero di sottospazi invarianti noti.

Tale notevole vantaggio viene ad essere perduto dallo Stakgold, in quanto egli non può più applicare il suo metodo di costruzione di un problema di base agli operatori (3_0) e (3_1), non essendo più i nuclei di tali operatori, nuclei del "ciclo chiuso".

Si è, allora, pensato di applicare il metodo degli "Invarianti Ortogonali" (1).

Si è considerato il problema nella ipotesi che gli operatori K_i $(i=0,1)$ siano operatori definiti in segno (positivi o negativi).

Se riesce $K_i > 0$, il metodo degli invarianti ortogonali fornisce le seguenti limitazioni per il j-simo autovalore $\mu_{i,j}$ del problema (2_i):

$$\mu_{i,j}^{(\nu)} \leq \mu_{i,j} \leq \sigma_{i,j}^{(\nu)} \tag{4}$$

dove, detto $\{v_{i,h}\}$ un sistema di funzioni linearmente indipendenti, completo nello spazio S_i, le $\mu_{i,j}^{(\nu)}$ sono le radici della seguente equazione secolare:

$$\begin{cases} \det \{(K_i v_{i,h}, v_{i,\ell}) - \mu(v_{i,h}, v_{i,\ell})\} = 0 \\ h,\ell = 1,\dots,\nu \end{cases} \tag{5}$$

avendo posto:

---

(1) Cfr. [3]

$$(6) \qquad (u,v) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} u(x)\, v(x)\, dx.$$

Detta $V_{i,\nu}$ la varietà determinata dai vettori $v_{i,1},\ldots,v_{i,\nu}$, sia $P_{i,\nu}$ il proiettore ortogonale di S_i su $V_{i,\nu}$.

Sia $w_{i,j,\nu}$ un autovettore dell'operatore $P_{i,\nu}\, K_i\, P_{i,\nu}$ corrispondente all'autovalore $\mu^{(\nu)}_{i,j}$.

Sia $P_{i,j,\nu}$ il proiettore ortogonale di S_i sullo spazio di tutti i vettori di $V_{i,\nu}$ ortogonali a $w_{i,j,\nu}$.

Si ha:

$$(7) \qquad \sigma^{(\nu)}_{i,j} = \left\{ \frac{\mathcal{J}^n_s\,(K_i) - \mathcal{J}^n_s(P_{i,\nu}\,K_i\,P_{i,\nu})}{\mathcal{J}^n_{s-1}(P_{i,j,\nu}\,K_i\,P_{i,j,\nu})} + \left[\mu^{(\nu)}_{i,j}\right]^n \right\}^{\frac{1}{n}}$$

ove gli interi positivi s ed n si suppongono fissati una volta per tutte.

$\mathcal{J}^n_s$ ed $\mathcal{J}^n_{s-1}$ sono gli invarianti ortogonali di grado n ed ordine s ed $s-1$, rispettivamente, degli operatori indicati in parentesi [1].

Si ponga:

$$K_0(x,y) = \frac{1}{2}\,\{K(x,y) + K(x,-y)\}$$

$$K_1(x,y) = \frac{1}{2}\,\{K(x,y) - K(x,-y)\}.$$

---

(1) Cfr. [3]

Sia:

$$K_i^{(1)}(x,y) = K_i(x,y) \qquad (i=0,1)$$

$$K_i^{(n)}(x,y) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} K_i^{(1)}(x,t)\, K_i^{(n-1)}(t,y)\, dt \qquad (n > 1)\ .$$

Si ha:

$$(8) \qquad \mathcal{T}_1^n(K_i) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} K_i^{(n)}(x,x)\, dx.$$

Si ha, poi, per una formula di Robert (1):

$$(9) \quad \mathcal{T}_s^n(K_i) = (-1)^s \sum_{1\le k\le s} \frac{(-1)^k}{k!} \left\{ \sum_{\substack{r_1+\ldots+r_k=s \\ r_i \ge 1}} \frac{\mathcal{T}_1^{nr_1}(K_i)\ldots\mathcal{T}_1^{nr_k}(K_i)}{r_1\ldots r_k} \right\} .$$

E' ovvio come le cose dette vadano modificate se riesce $K_i < 0$.
Come applicazione della teoria svolta, si è considerato il caso nel quale la funzione $k(t)$ sia una funzione del tipo:

$$(10) \qquad k(t) = f(e^{t^2}),$$

essendo $f(u)$ una funzione intera della variabile u verificante le condizioni:

$$f^{(m)}(0) \ge 0 \qquad m = 0,1,\ldots\ .$$

---

(1) Cfr. [7] .

Si dimostra in tale caso che:

IV.- <u>L'operatore</u> K_o , <u>relativo alla funzione</u> $k(t)$ <u>definita da</u> (10) <u>è positivo, mentre l'operatore</u> K_1 <u>è negativo</u>".

Per dimostrare il teorema relativamente all'operatore K_o basta far vedere che, qualunque sia la funzione non identicamente nulla $\phi(x)$, sommabile $(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$, riesce:

$$(11) \qquad \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} K_o(x,y)\, \phi(x)\, \phi(y)\, dy > 0.$$

Si osservi dapprima che, per le ipotesi fatte sulla f, riesce:

$$K_o(x,y) = \frac{1}{2}\left[f(e^{(x-y)^2}) + f(e^{(x+y)^2})\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[e^{k(x-y)^2} + e^{k(x+y)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, e^{kx^2} e^{ky^2} (e^{-2kxy} + e^{2kxy}) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, e^{kx^2} e^{ky^2} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(2k)^h}{h!}\left[(-1)^h x^h y^h + x^h y^h\right] =$$

$$= \sum_{k,h}^{0,\infty} a_k \frac{(2k)^{2h}}{(2h)!} x^{2h} y^{2h} e^{kx^2} e^{ky^2} .$$

Sostituendo l'espressione, ora ottenuta, nella (11) si ha:

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} K_o(x,y)\, \phi(x)\, \phi(y)\, dy =$$

$$= \sum_{k,h}^{0,\infty} a_k \frac{(2k)^{2h}}{(2h)!} \left[\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{kx^2} x^{2h}\, \phi(x)\, dx \right]^2 .$$

La quantità ora scritta è sicuramente positiva. Infatti, se esistesse un valore k_o per il quale riuscisse:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{k_o x^2} x^{2h}\, \phi(x)\, dx = 0,$$

la funzione $\phi(x)$ risulterebbe ortogonale a x^{2h} per ogni $h \geq 0$. Si avrebbe, allora, $\phi(x) \equiv 0$, contrariamente alle ipotesi sulla $\phi(x)$. Così è dimostrato che K_0 è un operatore positivo. In modo analogo si dimostra che K_1 è negativo.

Si dimostra che

V.- <u>L'invariante</u> $\mathcal{J}_1^n(K_0)$ <u>si rappresenta mediante il seguente sviluppo in serie</u>:

$$\mathcal{J}_1^n(K_0) = \sum_{h_1,h_2,\dots,h_{2n}}^{0,\infty} \sum_{s_1,\dots,s_n}^{0,\infty} a_{h_1} a_{h_3} \dots a_{h_{2n-1}}$$

$$(12)_0 \qquad \frac{(h_1)^{2h_2}(h_3)^{2h_4} \dots (h_{2n-1})^{2h_{2n}}}{(2h_2)!\,(2h_4)! \dots (2h_{2n})!}$$

$$\frac{(h_1+h_3)^{s_1}(h_3+h_5)^{s_2} \dots (h_{2n-1}+h_1)^{s_n}}{s_1! \dots s_n!\, 2^{2(h_2+h_4+\dots+h_{2n})+2(s_1+\dots+s_n)}}$$

$$\frac{a^{4(h_2+h_4+\dots+h_{2n})+2(s_1+\dots+s_n)+n}}{\left[2(h_2+h_4+s_1)+1\right]\left[2(h_4+h_6+s_2)+1\right] \dots \left[2(h_{2n}+h_2+s_n)+1\right]} .$$

Dimostrazione:

Riesce: $K_0^{(1)}(x,y) = K_0(x,y) = \sum_{h_1,h_2}^{0,\infty} a_{h_1} \frac{(2h_1)^{2h_2}}{(2h_2)!} x^{2h_2} e^{h_1 x^2} y^{2h_2} e^{h_1 y^2}$

Si calcoli, ora:

$$K_0^{(2)}(x,y) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} K_0^{(1)}(x,t)\, K_0^{(1)}(t,y)\, dt =$$

$$= \sum_{h_1,h_2,h_3,h_4}^{0,\infty} a_{h_1} a_{h_3} \frac{(2h_1)^{2h_2}(2h_3)^{2h_4}}{(2h_2)!(2h_4)!} e^{h_1 x^2} x^{2h_2}$$

$$e^{h_3 y^2} y^{2h_4} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{(h_1+h_3)t^2} t^{2(h_2+h_4)} dt.$$

Ponendo in generale

$$F_{j+k,i+h} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{(j+k)t^2} t^{2(i+h)} dt,$$

si ottiene:

$$K_o^{(2)}(x,y) = \sum_{h_1,h_2,h_3,h_4}^{o,\infty} a_{h_1} a_{h_3} \frac{(2h_1)^{2h_2}(2h_3)^{2h_4}}{(2h_2)!(2h_4)!}$$

$$e^{h_1 x^2} x^{2h_2} e^{h_3 y^2} y^{2h_4} F_{h_1+h_3,h_2+h_4} .$$

Analogamente si può calcolare $K_o^{(3)}(x,y)$ ed ottenere:

$$K_o^{(3)}(x,y) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} K_o^{(1)}(x,t)\, K_o^{(2)}(t,y)\, dt =$$

$$= \sum_{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5,h_6}^{o,\infty} a_{h_1} a_{h_3} a_{h_5} \frac{(2h_1)^{2h_2}(2h_3)^{2h_4}(2h_5)^{2h_6}}{(2h_2)!(2h_4)!(2h_6)!}$$

$$e^{h_1 x^2} x^{2h_2} e^{h_5 y^2} y^{2h_6} F_{h_1+h_3,h_2+h_4} F_{h_3+h_5,h_4+h_6} .$$

In generale, quindi, si ottiene:

$$K_o^{(n)}(x,y) = \sum_{h_1,h_2,\dots,h_{2n}}^{0,\infty} a_{h_1} a_{h_3} \dots a_{h_{2n-1}}$$

$$\frac{(2h_1)^{2h_2}(2h_3)^{2h_4}\dots(2h_{2n-1})^{2h_{2n}}}{(2h_2)!(2h_4)!\dots(2h_{2n})!} e^{h_1 x^2} x^{2h_2} e^{h_{2n-1}y^2} y^{2h_{2n}}$$

$$F_{h_1+h_3,h_2+h_4} \quad F_{h_3+h_5,h_4+h_6} \dots F_{h_{2n-3}+h_{2n-1},h_{2n-2}+h_{2n}}$$

D'altra parte, sviluppando $F_{j+k,i+h}$ si ha:

$$F_{j+k,i+h} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{(j+k)t^2} t^{2(i+h)} dt =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(j+k)^r}{r!} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} t^{2(i+h+r)} dt =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(j+k)^r}{r!} \left[\left(\frac{a}{2}\right)^{2(i+h+r)+1} \right] \frac{\left[1+(-1)^{2(i+h+r)+2}\right]}{2(i+h+r)+1}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(j+k)^r a^{2(i+h+r)+1}}{r!\left[2(i+h+r)+1\right] 2^{2(i+h+r)}} .$$

Sostituendo tale espressione in quella di $K_0^{(n)}(x,y)$, applicando la (8) ed eseguendo l'integrazione, si ottiene proprio la (12_0).

Tale formula permette il calcolo numerico di un valore per difetto dell'invariante $\mathcal{J}_1^n(K_0)$, con un errore tanto piccolo quanto si vuole, dato che è possibile maggiorare il resto della serie a secondo membro della (11).

Procedendo in modo del tutto analogo si dimostra che:

VI. - <u>L'invariante</u> $\mathcal{J}_1^n(K_1)$ <u>si rappresenta mediante il seguente sviluppo in serie:</u>

$$(12_1) \qquad \mathcal{J}_1^n(K_1) = (-1)^n \sum_{h_1,h_2,\dots,h_{2n}}^{0,\infty} \sum_{s_1,\dots,s_n}^{0,\infty} a_{h_1} a_{h_3} \dots a_{h_{2n-1}} \frac{(h_1)^{2h_2+1} (h_3)^{2h_4+1} \dots\dots (h_{2n-1})^{2h_{2n}+1}}{(2h_2+1)!\,(2h_4+1)!\dots(2h_{2n}+1)!}$$

$$\frac{(h_1+h_3)^{s_1}(h_3+h_5)^{s_2}\dots(h_{2n-1}+h_1)^{s_n}}{s_1!\dots s_n!\; 2^{2(h_2+h_4+\dots+h_{2n})+2(s_1+\dots+s_n)+n}}$$

$$\frac{a^{4(h_2+h_4+\dots+h_{2n})+2(s_1+\dots+s_n)+3n}}{[2(h_2+h_4+s_1)+3]\,[2(h_4+h_6+s_2)+3]\dots[2(h_{2n}+h_2+s_n)+3]} \,.$$

Per quanto concerne gli esempi numerici si è considerato il caso:

$$f(u) \equiv u \,.$$

2 . Metodo di Rayleigh-Ritz. Risultati numerici.

Nel caso dell'operatore K_o si sono scelte come funzioni $v_{o,1},\dots\dots,v_{o,\nu}$ le seguenti:

$$v_{o,j}(x)\quad\begin{cases} = 1 & \text{per } -\frac{j}{2} \leq x \leq \frac{1-j}{2} \\ = 1 & \text{per } \frac{j-1}{2} \leq x \leq \frac{j}{2} \\ = 0 & \text{altrove .}\end{cases}\qquad (j=1,2,\dots,\nu)$$

Nel caso dell'operatore K_1 si sono scelte come funzioni $v_{1,1},\dots,v_{1,\nu}$ le seguenti:

$$v_{1,j}(x)\quad\begin{cases} = -1 & \text{per } -\frac{j}{2} \leq x \leq \frac{1-j}{2} \\ = 1 & \text{per } \frac{j-1}{2} \leq x \leq \frac{j}{2} \\ = 0 & \text{altrove .}\end{cases}\qquad (j=1,2,\dots,\nu)$$

La (5) diviene allora:

$$(13)\qquad\begin{cases} \det(c_{ih\ell} - \mu\, b_{ih\ell}) = 0 \\ i=0,1;\quad h,\ell = 1,2,\dots\nu \end{cases}$$

ove:

$$c_{oh\ell} = 2 \sum_{j=o}^{\infty} \frac{(2\nu)^{-(2j+2)}}{j!(2j+1)(2j+2)} \{(h+\ell)^{2j+2} -$$

$$- 2(h+\ell-1)^{2j+2} + (h+\ell-2)^{2j+2} - 2(h-\ell)^{2j+2} + (h-\ell+1)^{2j+2} +$$

$$+ (h-\ell-1)^{2j+2}\}$$

$$c_{1h\ell} = 2 \sum_{j=o}^{\infty} \frac{(2\nu)^{-(2j+2)}}{j!(2j+1)\ (2j+2} \{(h-\ell+1)^{2j+2} +$$

$$+ (h-\ell-1)^{2j+2} + 2(h+\ell-1)^{2j+2} - (h+\ell)^{2j+2} - 2(h-\ell)^{2j+2} -$$

$$- (h+\ell-2)^{2j+2}\}$$

$$b_{oh\ell} = b_{1h\ell} = \frac{1}{\nu} \qquad \delta_{h\ell} \ ,$$

essendo $\delta_{h\ell}$ il simbolo di Kronecker.
Riesce, allora, conveniente scrivere la (13) nella forma:

$$(14) \qquad \begin{cases} \det \ (a_{ih\ell} - \mu\delta_{h\ell} \quad) = 0 \\ i = 0,1;\ h,\ \ell = 1,2,\dots,\nu \end{cases}$$

ove

$$a_{ih\ell} = \nu\ c_{ih\ell} \ .$$

Nel caso dell'operatore K_o le radici della (14) forniscono delle approssimazioni per difetto degli autovalori del problema (2_o), mentre nel caso dell'operatore K_1 esse forniscono approssimazioni per eccesso degli autovalori del problema (2_1).

Tutti i calcoli relativi al presente lavoro e, in particolare, quelli relativi alla risoluzione della (14), sono stati eseguiti operando in virgola mobile con 35 cifre significative della mantissa nella rappresentazione dei numeri in base dieci.

Nelle tabelle n.1_o ed 1_1 sono riportati i valori ottenuti per $\mu_{i,j}^{(\nu)}$ assumendo $\nu = 10$ e $\nu = 17, 30$ limitatamente ai valori $j=1,2,3,4$. I valori ottenuti per $j \geq 5$ sono scarsamente significativi poiché, essendo $|\mu_{ij}^{(\nu)}| \leq 10^{-8}$ tali risultati risentono maggiormente degli errori di arrotondamento.

L'esecuzione dei calcoli per diversi valori di ν è dovuta al proposito di controllare i miglioramenti che le approssimazioni ricevono passando da un dato ν ad un ν maggiore.

Si è ritenuto, inoltre, opportuno considerare gli operatori K_i^2 (i=o,1). L'operatore K_i^2, come è evidente ha la seguente successione di autovalori positivi:

$$\mu_{i,1}^2 \geq \mu_{i,2}^2 \geq \dots \geq \mu_{i,\nu}^2 \geq \dots\dots \quad .$$

Il metodo di Rayleigh-Ritz, applicato all'operatore K_i^2, conduce alla seguente equazione secolare:

$$
(15) \qquad \begin{cases} \det \{ (\mathcal{K}_i v_{i,h}, \mathcal{K}_i v_{i,\ell}) - M(v_{i,h}, v_{i,\ell}) \} = 0 \\ i = 0,1; \qquad h,\ell = 1,2,\dots\nu \end{cases}
$$

della quale si indicano con

$$
M^{(\nu)}_{i,1} \geq M^{(\nu)}_{i,2} \geq \dots \geq M^{(\nu)}_{i,\nu}
$$

le ν radici.

Tenendo presente la scelta effettuata per le funzioni $v_{i,1},\dots,v_{i,\nu}$,

posto

$$
\alpha_{ih\ell} = \nu(\mathcal{K}_i v_{i,h}, \mathcal{K}_i v_{i,\ell}),
$$

la (15) diviene

$$
(16) \qquad \begin{cases} \det (\alpha_{ih\ell} - M \, \delta_{h\ell}) = 0 \\ i = 0,1; \qquad h, \ell = 1,2,\dots,\nu \end{cases}
$$

ove

$$
\alpha_{oh\ell} = \frac{1}{\nu} \sum_{k=o}^{\infty} \frac{1}{(2\nu)^{2k}} \sum_{j=o}^{k} \frac{1}{j!\,(2j+1)\,(k-j)!}
$$

$$\frac{1}{[2(k-j)+1]} \sum_{n=0}^{j} \binom{2j+1}{2n} \nu^{2n} \left[h^{2(j-n)+1} - (h-1)^{2(j-n)+1} \right]$$

$$\sum_{m=0}^{k-j} \binom{2(k-j)+1}{2m} \nu^{2m} \left[\ell^{2(k-j-m)+1} - (\ell-1)^{2(k-j-m)+1} \right] \frac{1}{[2(n+m)+1]} \ ;$$

$$\alpha_{1h\ell} = \nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu)^{2k}} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!\,(2j+1)\,(k-j)!\,[2(k-j)+1]}$$

$$\sum_{n=0}^{j} \binom{2j+1}{2n+1} \nu^{2n} \left[(h-1)^{2(j-n)} - h^{2(j-n)} \right]$$

$$\sum_{m=0}^{k-j} \binom{2(k-j)+1}{2m+1} \nu^{2m} \left[(\ell-1)^{2(k-j-m)} - \ell^{2(k-j-m)} \right] \frac{1}{[2(n+m)+3]} \ .$$

Poiché riesce

$$\sqrt{M_{i,j}^{(\nu)}} \leq \sqrt{M_{i,j}^{(\nu+1)}} \qquad (j=1,\dots.\nu)$$

$$\lim_{\nu\to\infty} \sqrt{M_{i,j}^{(\nu)}} = |\mu_{i,j}| \ ,$$

la risoluzione della (16) fornisce dei numeri le cui radici quadrate sono anche approssimazioni per difetto degli autovalori di K_0 e di $-K_1$; anzi fornisce approssimazioni per difetto migliori di quelle fornite dalla (14)[1]

([1]) Cfr. [6] teorema 2.I pag. 205.

Nelle tabelle n. 1_o ed 1_1, in appendice al presente lavoro, vengono riportati i valori ottenuti per $\sqrt{M_{o,j}^{(\nu)}}$ e $-\sqrt{M_{1,j}^{(\nu)}}$, assumendo $\nu = 10$ e $\nu = 17$, limitatamente ai valori $j = 1,2,3,4$.

3.- Il metodo degli invarianti ortogonali.

Per quanto concerne gli invarianti ortogonali (cfr. (12_o) e (12_1), si hanno i seguenti sviluppi in serie

$$(17_o)\qquad \mathcal{J}_1^n(K_o) = \sum_{h_1,\dots,h_n}^{0,\infty} \sum_{s_1,\dots,s_n}^{0,\infty} \frac{1}{(2h_1)!\dots(2h_n)!}$$

$$\frac{1}{s_1!\dots s_n! \left[2(h_1+h_2+s_1)+1\right] \dots \left[2(h_n+h_1+s_n)+1\right]}$$

$$\frac{1}{2^{(s_1+\dots+s_n) + 2(h_1+\dots+h_n)}}$$

$n=1,2,\dots\dots$.

$$(17_1)\qquad \mathcal{J}_1^n(K_1) = (-1)^n \sum_{h_1,\dots,h_n}^{0,\infty} \sum_{s_1,\dots,s_n}^{0,\infty} \frac{1}{s_1!\dots s_n!}$$

$$\frac{1}{(2h_1+1)!\dots(2h_n+1)! \left[2(h_1+h_2+s_1)+3\right]\dots \left[2(h_n+h_1+s_n)+3\right]}$$

$$\frac{1}{2^{(s_1+\dots+s_n) + 2(h_1+\dots+h_n)+n}}$$

$n=1,2,\dots\dots$.

Prima di eseguire il calcolo delle approssimazioni $\sigma_{i,j}^{(\nu)}$ mediante la (7), si è determinata una maggiorazione del resto della serie che rappresenta l'invariante $\mathcal{J}_1^n(K_i)$.

Per quanto riguarda la maggiorazione del resto della serie al secondo membro della (17_0), si è proceduto nel modo seguente.

Posto:

$$a_{h_1 \dots h_n s_1 \dots s_n} = \frac{1}{(2h_1)! \dots (2h_n)! s_1! \dots s_n! \left[2(h_1+h_2+s_1)+1\right] \dots}$$

$$\frac{1}{\left[2(h_n+h_1+s_n)+1\right] \; 2^{2(h_1+\dots+h_n)+(s_1+\dots+s_n)}}$$

$$b_{h_j} = \frac{1}{(2h_j)! \; 2^{2h_j}} \;, \qquad c_{s_j} = \frac{1}{s_j! \; 2^{s_j}}$$

$$j = 1,2,\dots,n \;;$$

$$d_{s_j h_j h_{j+1}} = \frac{1}{2(h_j+h_{j+1}+s_j)+1} \qquad j = 1,2,\dots,n-1 \;;$$

$$d_{s_n h_n h_1} = \frac{1}{2(h_n+h_1+s_n)+1} \;;$$

riesce ovviamente

$$a_{h_1 \dots h_n s_1 \dots s_n} = b_{h_1} \dots b_{h_n} c_{s_1} \dots c_{s_n} d_{s_1 h_1 h_2} \dots d_{s_n h_n h_1} \;.$$

Si considerino ora le seguenti serie:

$$\sum_{h_j=o}^{\infty} b_{h_j} \quad ; \qquad \sum_{s_j=o}^{\infty} c_{s_j} d_{s_j h_p h_q}$$

ove p e q possono assumere uno dei valori $1,2,\ldots,n$.

Si dimostra ,qualunque sia $j = 1,2,\ldots,n$ e qualunque siano p e q $(p,q=1,\ldots,n)$,che

$$\sum_{h_j=o}^{m} b_{h_j} < \rho_{om} \quad , \quad \sum_{h_j=m+1}^{\infty} b_{h_j} < \sigma_{om}$$

ove

$$\rho_{om} = 1 + \frac{2}{15}\left(1 - \frac{1}{4^{2m}}\right) \quad , \quad \sigma_{om} = \frac{(2m+3)^2}{(2m+2)!\; 4^m\left[4(2m+3)^2-1\right]} \;,$$

e che

$$\sum_{s_j=o}^{m} c_{s_j} d_{s_j h_p h_q} < \alpha_{om}, \qquad \sum_{s_j=m+1}^{\infty} c_{s_j} d_{s_j h_p h_q} < \beta_{om}$$

ove

$$\alpha_{om} = 1 + \frac{2}{9}\left(1 - \frac{1}{4^m}\right) \quad , \quad \beta_{om} = \frac{m+2}{2^m (m+1)!\,(2m+3)^2} \;.$$

D'altra parte, il resto della serie al secondo membro della (17_o) è dato da:

$$R^{m}_{1n}(K_o) = \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{\gamma_1\ldots\gamma_p} \sum^{o,m}_{h_{\gamma_1}\ldots h_{\gamma_p}} \sum^{m+1,\infty}_{h_{\gamma_{p+1}}\ldots h_{\gamma_n}} \sum^{o,\infty}_{s_1\ldots s_n}$$

$$a_{h_{\gamma_1}\ldots h_{\gamma_p} h_{\gamma_{p+1}}\ldots h_{\gamma_n} s_1\ldots s_n} +$$

$$+ \sum_{q=1}^{n-1} \sum_{\delta_1\ldots\delta_q} \sum^{o,m}_{h_1\ldots h_n} \sum^{o,m}_{s_{\delta_1}\ldots s_{\delta_q}} \sum^{m+1,\infty}_{s_{\delta_{q+1}}\ldots\ldots s_{\delta_n}}$$

$$a_{h_1\ldots h_n s_{\delta_1}\ldots s_{\delta_q} s_{\delta_{q+1}}\ldots s_{\delta_n}} +$$

$$+ \sum^{m+1,\infty}_{h_1\ldots h_n} \sum^{o,\infty}_{s_1\ldots s_n} a_{h_1\ldots h_n s_1\ldots s_n} +$$

$$+ \sum^{o,m}_{h_1\ldots h_n} \sum^{m+1,\infty}_{s_1\ldots s_n} a_{h_1\ldots h_n s_1\ldots s_n}$$

ove con $\gamma_1\ldots\ldots\gamma_p\,\gamma_{p+1}\ldots\ldots\gamma_n$ $(\delta_1\ldots\ldots\delta_q\,\delta_{q+1}\ldots\delta_n)$ si è indicata una generica disposizione semplice dei numeri $1,2,\ldots\ldots,n$ ottenuta scegliendo come $\gamma_1\ldots\ldots\gamma_p$ $(\delta_1\ldots\ldots\delta_q)$ una combinazione senza ripetizione di classe p (di classe q) dei numeri $1,2,\ldots\ldots,n$.

Con il simbolo $\sum_{\gamma_1\ldots\gamma_p}$ $\left(\sum_{\delta_1\ldots\delta_q}\right)$ si intende la sommatoria ottenuta al variare di $\gamma_1\ldots\gamma_p$ $(\delta_1\ldots\delta_q)$ nell'insieme delle combinazioni senza ripetizioni di classe p (di classe q) dei numeri $1,2,\ldots,n$.

Con calcoli elementari si ottiene

$$R^{m}_{1n}(K_o) < (\alpha_{om} + \beta_{om})^n \left[\sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p} \rho^{p}_{om}\,\sigma^{n-p}_{om} + \sigma^{n}_{om}\right]$$

$$+ \rho_{om}^{n} \left[\sum_{q=1}^{n-1} \binom{n}{q} \alpha_{om}^{q} \beta_{om}^{n-q} + \beta_{om}^{n} \right]$$

$$= \left[(\alpha_{om} + \beta_{om}) (\rho_{om} + \sigma_{om}) \right]^{n} - \alpha_{om}^{n} \rho_{om}^{n} .$$

Per quanto riguarda il resto della serie che rappresenta l'invariante $\mathcal{J}_1^n (K_1)$, procedendo in modo del tutto analogo si ottiene la seguente maggiorazione:

$$R_{1n}^{m} (K_1) < (-1)^{n} \{ \left[(\alpha_{1m} + \beta_{1m}) (\rho_{1m} + \sigma_{1m}) \right]^{n} - \alpha_{1m}^{n} \rho_{1m}^{n} \}$$

essendo:

$$\alpha_{1m} = \frac{1}{3}(1 + 2 \frac{4^m - 1}{5 \cdot 4^m}), \qquad \beta_{1m} = \frac{m+2}{2^m (m+1)!(2m+3)(2m+5)} ,$$

$$\rho_{1m} = \frac{4^{2m+2} - 1}{30 \cdot 4^{2m}} , \qquad \sigma_{1m} = \frac{(m+2)^2}{(2m+3)! 2^{2m-1} \left[16(m+2)^2 - 1 \right]} .$$

Le approssimazioni $\sigma_{ij}^{(\nu)}$ sono state calcolate considerando i seguenti valori di s e di n: $s = 1$, $n = 1,2,3$; $s = 2$, $n = 1$.

Nelle tabelle n. $2_i, 3_i, 4_i$ e 5_i $(i=0,1)$ sono riportati i valori $\sigma_{ij}^{(\nu)}$ ottenuti per $j = 1,2,3,4$ sia per $\nu = 10$ che per $\nu = 17,30$ e relativi agli invarianti $\mathcal{J}_1^n (K_i)$ $(n=1,2,3)$ ed $\mathcal{J}_2^1 (K_i)$ rispettivamente.

Per $\nu = 10$ e $\nu = 17$ nell'applicazione della (7) sono state utilizzate come approssimazioni per difetto nel caso dell'operatore K_o (per eccesso nel caso dell'operatore $-K_1$) i valori $\sqrt{M_{oj}^{(\nu)}}$ $(-\sqrt{M_{1j}^{(\nu)}})$.

Successivamente sono stati applicati, relativamente all'operatore K_0, procedimenti di raffinamento del metodo degli Invarianti Ortogonali [1]. I risultati numerici così conseguiti sono riportati nella tabella n. 6_0 in appendice al presente lavoro. Tuttavia nel problema in esame i suddetti metodi non hanno fornito miglioramenti significativi rispetto ai risultati numerici conseguiti mediante la (7).

---

(1) Cfr. [4], [6]

3. - Miglioramento dell'approssimazione per eccesso dell'autovalore μ_{o1} e dell'approssimazione per difetto dell'autovalore μ_{11}.

Sia K un operatore compatto positivo e si indichi con $\{\sigma_2^{(\nu)}\}$ una successione verificante le seguenti condizioni:

$$\sigma_2^{(\nu)} \geq \sigma_2^{(\nu+1)} \quad , \qquad \lim_{\nu\to\infty} \sigma_2^{(\nu)} = \mu_2 \quad .$$

Una siffatta successione è fornita dalla (7) e dai casi particolari che da essa si possono ottenere.

Sia q un indice tale che, per $\nu \geq q$, riesca

$$\mu_1^{(\nu)} > \sigma_2^{(q)} \quad . \tag{18}$$

Si dimostra [1], allora, che per l'autovalore μ_1 sussiste la seguente limitazione per eccesso

$$\mu_1 \leq \frac{M_1^{(\nu)} - \sigma_2^{(q)} \mu_1^{(\nu)}}{\mu_1^{(\nu)} - \sigma_2^{(q)}} \tag{19}$$

ed inoltre

$$\mu_1 = \lim_{\nu\to\infty} \frac{M_1^{(\nu)} - \sigma_2^{(q)} \mu_1^{(\nu)}}{\mu_1^{(\nu)} - \sigma_2^{(q)}} \quad .$$

---

(1) Cfr. [5]

La (19) applicata relativamente all'operatore K_o diventa:

$$\mu_{o1} \leq \frac{M_{o1}^{(\nu)} - \sigma_{o2}^{(q)} \mu_{o1}^{(\nu)}}{\mu_{o1}^{(\nu)} - \sigma_{o2}^{(q)}} . \tag{20}$$

La formula (19) può applicarsi anche relativamente all'operatore $- K_1$ e con considerazioni elementari si ottiene la seguente approssimazione per difetto di μ_{11} :

$$\mu_{11} \geq \frac{M_{11}^{(\nu)} - \sigma_{12}^{(q)} \mu_{12}^{(\nu)}}{\mu_{12}^{(\nu)} - \sigma_{12}^{(q)}} . \tag{21}$$

La (20) e la (21) sono state applicate assumendo $\nu = 10$, $q = 10$ e $\nu = 17$, $q= 17$; in entrambi i casi la (18) è verificata assumendo come $\sigma_2^{(q)}$ il valore $\sigma_{i2}^{(q)}$ $(i=0,1)$ ottenuto rispettivamente per $\nu = 10$ e $\nu = 17$ dalla (7) per $s = 2$ e $n= 1$.

Le limitazioni ottenute sono le seguenti:

$\mu_{o1} <$ 1,21694264 per $\nu =10$,

$\mu_{o1} <$ 1,21694157 per $\nu =17$;

$\mu_{11} >$ -0,23071302 per $\nu =10$,

$\mu_{11} >$ -0,23071172 per $\nu =17$.

A P P E N D I C E

TABELLA N. 1_o Valori per difetto

j	$\mu_{oj}^{(10)}$	$\sqrt{M_{oj}^{(10)}}$	$\mu_{oj}^{(17)}$	$\sqrt{M_{oj}^{(17)}}$	$\mu_{oj}^{(30)}$
1	1,21680194	1,21687146	1,21689277	1,21691688	1,2169255
2	0,014149	0,014257	0,014290	0,014327	0,014341
3	0,0000178	0,0000186	0,0000188	0,0000191	0,0000192
4	0,000000007	0,000000009	0,000000009	0,00000002	0,00000001

TABELLA N. 2_o

Valori per eccesso ottenuti con l'invariante $\mathcal{J}_1^1(K_o)$

j	$\sigma_{oj}^{(10)}$	$\sigma_{oj}^{(17)}$	$\sigma_{oj}^{(30)}$
1	1,217050	1,216978	1,216965
2	0,014435	0,014389	0,014381
3	0,000197	0,000081	0,000059
4	0,000178	0,000061	0,000039

TABELLA N. 3_o

Valori per eccesso ottenuti con l'invariante $\mathcal{J}_1^2(K_o)$

j	$\sigma_{oj}^{(10)}$	$\sigma_{oj}^{(17)}$	$\sigma_{oj}^{(30)}$
1	1,216942279	1,2169414	1,21694128
2	0,0193809	0,01628	0,0156232
3	0,0131285	0,00773	0,0061978
4	0,0131285	0,00773	0,0061978

TABELLA N. 4_o

Valori per eccesso ottenuti con l'invariante $\mathcal{J}_1^3(K_o)$

j	$\sigma_{oj}^{(10)}$	$\sigma_{oj}^{(17)}$	$\sigma_{oj}^{(30)}$
1	1,21694102	1,21694101	1,216941008
2	0,0678	0,0479	0,0415
3	0,0676	0,0474	0,0409
4	0,0676	0,0474	0,0409

TABELLA N. 5_o

Valori per eccesso ottenuti con l'invariante $\mathcal{J}_2^1(K_o)$

j	$\sigma_{oj}^{(10)}$	$\sigma_{oj}^{(17)}$	$\sigma_{oj}^{(30)}$
1	1,22624	1,22014	1,21899
2	0,014367	0,0143659	0,01436576
3	0,00012	0,00056	0,000043
4	0,00010	0,000037	0,000024

TABELLA N. 6_o

Valori per eccesso ottenuti con gli invarianti $\mathcal{J}_1^2(K_o)$ e $\mathcal{J}_1^3(K_o)$ (1)

j	s=1 n=2 $\sigma_{oj}^{(10)}$	s=1 n=2 $\sigma_{oj}^{(17)}$	s=1 n=3 $\sigma_{oj}^{(10)}$	s=1 n=3 $\sigma_{oj}^{(17)}$
1	1,216942275	1,2169414	1,216941020268	1,216941010380
2	0,0193807	0,01628	0,0678	0,479
3	0,0131281	0,0077	0,0676	0,0474
4	0,0131281	0,0077	0,0676	0,0474

(1) Cfr. [6] formula (6.13) pag. 218 e formula (6.20) pag. 220.

TABELLA N. 1_1 Valori per eccesso

j	$\mu_{1j}^{(10)}$	$-\sqrt{M_{1j}^{(10)}}$	$\mu_{1j}^{(17)}$	$-\sqrt{M_{1j}^{(17)}}$	$\mu_{1j}^{(30)}$
1	-0,229962513	-0,230336458	-0,230451814	-0,230581389	-0,23062777
2	-0,000589603	-0,000601845	-0,000605706	-0,000610009	-0,00061156
3	-0,000000419	-0,000000454	-0,000000465	-0,000000478	-0,000000482
4	-0,0000000001	-0,0000000014	-0,0000000001	-0,0000000001	-0,0000000001

TABELLA N. 2_1

Valori per difetto ottenuti con l'invariante $\mathcal{J}_1^1(\kappa_1)$

j	$\sigma_{1j}^{(10)}$	$\sigma_{ij}^{(17)}$	$\sigma_{ij}^{(30)}$
1	-0,230723	-0,230715	-0,230713
2	-0,00098	-0,00074	-0,00069
3	-0,00038	-0,00013	-0,00008
4	-0,00038	-0,00013	-0,00008

TABELLA N. 3_1

Valori per difetto ottenuti con l'invariante $\mathcal{J}_1^2(K_1)$

j	$\sigma_{1j}^{(10)}$	$\sigma_{1j}^{(17)}$	$\sigma_{1j}^{(30)}$
1	-0,23071107	-0,23071105	-0,23071104
2	-0,01315	-0,0077578	-0,0062
3	-0,01314	-0,007733	-0,0061
4	-0,01314	-0,007733	-0,0061

TABELLA N. 4_1

Valori per difetto ottenuti con l'invariante $\mathcal{J}_1^3(K_1)$

j	$\sigma_{1j}^{(10)}$	$\sigma_{1j}^{(17)}$	$\sigma_{1j}^{(30)}$
1	-0,230668	-0,2307112	-0,2307112
2	-0,03909	-0,0274	-0,0237
3	-0,0375	-0,0274	-0,0237
4	-0,0375	-0,0274	-0,0237

TABELLA N. 5_1

Valori per difetto ottenuti con l'invariante $\mathcal{J}_2^1(\kappa_1)$

j	$\sigma_{1j}^{(10)}$	$\sigma_{1j}^{(17)}$	$\sigma_{1j}^{(30)}$
1	-0,235510	-0,232353	-0,231762
2	-0,000615	-0,0006147	-0,0006145
3	-0,000013	-0,0000051	-0,0000034
4	-0,000013	-0,0000046	-0,0000030

VALORI CALCOLATI DEGLI INVARIANTI ORTOGONALI

$$\mathcal{J}_1^1(K_0) \quad < \quad 1{,}231325872953590801$$

$$\mathcal{J}_1^2(K_0) \quad < \quad 1{,}481151774951525641$$

$$\mathcal{J}_1^3(K_0) \quad < \quad 1{,}80222616096692092$$

$$\mathcal{J}_2^1(K_0) \quad < \quad 0{,}01750581522669838$$

$$\mathcal{J}_1^1(K_1) \quad > \quad -\ 0{,}231325872953590805$$

$$\mathcal{J}_1^2(K_1) \quad < \quad 0{,}053227961193567796$$

$$\mathcal{J}_1^3(K_1) \quad > \quad -\ 0{,}01228021880780812$$

$$\mathcal{J}_2^1(K_1) \quad < \quad 0{,}00014184915208651$$

TABELLE RIASSUNTIVE DEI MIGLIORI RISULTATI NUMERICI OTTENUTI

OPERATORE K_o

1,216925	<	μ_{o1}	<	1,216941
0,014341	<	μ_{o2}	<	0,014365
0,000019	<	μ_{o3}	<	0,000024

OPERATORE K_1

- 0,23071	<	μ_{11}	<	- 0,230627
- 0,000614	<	μ_{12}	<	- 0,000611
- 0,000003	<	μ_{13}	<	- 0,0000004

B I B L I O G R A F I A

[1] Courant - Hilbert: " *Methods of Mathematical Physics*", Vol. I, Interscience Publishers, Inc., New York, 1962.

[2] G. Fichera: "*Lezioni sulla teoria spettrale degli operatori*" - Istituto Matematico "G.Castelnuovo" dell'Università degli Studi di Roma, 1968.

[3] G. Fichera: "*Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems*" --Lecture Notes in Mathem. N. 8, Springer Verlag, Berlin,Heidelberg, New York, 1965.

[4] G. Fichera: "*Sul miglioramento delle approssimazioni per difetto degli autovalori*" - Note I e II, Rend. Accad. Naz. Lincei, Serie VIII,VOL.XLII, fasc. 2-3, febbraio-marzo 1967.

[5] G. Fichera: "*Osservazioni e risultati relativi al calcolo degli autovalori di taluni operatori positivi*" - Boll. Un. Mat. Ital. (4) 11 (1975), no 3, suppl., 430-443.

[6] G. Fichera M.A. Sneider: "*Un problema di autovalori proposto da Alexander M. Ostrowski*" - Rendiconti di Matematica, Vol. 8, Serie VI, 1975.

[7] D. Robert: "*Invariants ortogonaux pour certaines classes d'opérateurs*" - J. Math. Pures Appl., t.52,81-114,1973.

[8] I. Stakgold: "*On Weinstein's Intermediate Problems for Integral Equations with Difference Kernels*" - Journal of Mathematics and Mechanics, Vol. 19, N.4,1969.