Se in particolare f soddisfa alla condizione di stretta monotonia

1.3 $$(f(u) - f(v)\ ,\ u - v) \leq -\mu\|u - v\|^2 \quad \text{con } \mu > 0$$

e per ogni $u,v \in R^s$, f é bigettiva e bicontinua e l'insieme

$$\Omega = \{ y \in R^s : f(y) = 0 \}$$

si riduce ad un solo punto.

Indicata con $\overset{*}{J}(x)$ la matrice Jacobiana della funzione $g(x) = f(x) + \mu x$, con I la matrice unitaria di ordine s , per la (1.3) risulta $(g(u)-g(v),u-v) \leq 0$ per ogni $u,v \in R^s$, e per il teorema 3 $(\overset{*}{J}(x)u,u) = ((J(x) + \mu I)u,u) \leq 0$ e quindi

1.4 $$(J(x)u,u) \leq -\mu\ \|u\|^2 \qquad \forall\ x,u \in R^s\ .$$

Inoltre la funzione $V : R^s \to R$ definita da $V(y) = (f(y),f(y))$ é tale che:

a) $V(y) = 0 \quad \forall\ y \in \Omega \quad ; \quad V(y) > 0 \quad \forall\ y \notin \Omega$

b) $\frac{d}{dt} V(y(t)) = 2(J(y)f(y),f(y)) < 0 \quad \forall\ y \notin \Omega$

dove $y = y(t)$ é una soluzione della (1.1).

Pertanto[1] l'insieme Ω è globalmente asintoticamente stabile in R^s, cioè il punto di equilibrio è globalmente stabile e attrattivo in R^s .

§2. Richiami sulla A e G-stabilità.

Si consideri la (1.1) con la condizione (1.2). Il generale metodo lineare a k-passi può scriversi

2.1 $$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}$$

dove α_j e β_j sono costanti ed $f_{n+j} = f(y_{n+j})$ per $j = 0,\ldots,k$.

Il metodo (2.1) sarà nel seguito indicato brevemente con (ρ,σ) dove

$$\rho(\zeta) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j\ \zeta^j \qquad \sigma(\zeta) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j\ \zeta^j$$

Con l'aiuto dell'operatore traslazione E , $Ey_n = y_{n+1}$ la (2.1) si può scrivere

$$\rho(E)y_n = h\,\sigma(E)f_n$$

Si richiamano ora alcune definizioni e risultati ottenuti nella teoria di discretizzazione di Dalquist.

Definizione 1. - Un metodo (ρ,σ) si dice A-stabile se

$$\operatorname{Re}\frac{\rho(\zeta)}{\sigma(\zeta)} > 0 \qquad \text{per } |\zeta|>1 \tag{2.2}$$

Definizione 2. - Siano $x_j \in R$ $j = 0,1,\ldots.$ e posto $X_n = (x_n, x_{n+1}, \ldots$ $\ldots, x_{n+k-1})^T$ la condizione di G-stabilità si esprime dicendo che esiste una matrice G di ordine k, simmetrica e definita positiva tale che per tutti i numeri reali $x_0, x_1, \ldots, x_k$ si abbia

$$X_1^T G X_1 - X_0^T G X_0 \leq 2\,\sigma(E)x_0 \cdot \rho(E)x_0 \tag{2.3}$$

Teorema 1.[2] - Ogni metodo A-stabile (ρ,σ) é G-stabile per almeno una matrice G reale simmetrica e definita positiva.

Corollario 1. - Sia $\{y_n\}_{n \in N}$ una arbitraria successione di vettori di R^s e $Y_n = (y_n^T, y_{n+1}^T, \ldots, y_{n+k-1}^T)^T$.

Se il metodo (ρ,σ) é A-stabile posto

$$\|Y_n\|_G^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} g_{ij}(y_{n+i-1}, y_{n+j-1})$$

si ha

$$\|Y_{n+1}\|_G^2 - \|Y_n\|_G^2 \leq 2(\sigma(E)y_n, \rho(E)y_n) \tag{2.4}$$

Teorema 2.- Un metodo lineare multistep esplicito non può essere A-stabile. L'ordine di un metodo lineare multistep implicito A-stabile non può essere maggiore di due.

La regola del trapezio é il metodo lineare multistep implicito A-stabile con il più piccolo coefficiente nell'errore di troncamento.

Le condizioni cui deve soddisfare un metodo k-step del secondo ordine sono:

a) $\sum_{j=o}^{k} \alpha_j = 0$

b) $\sum_{j=o}^{k} \beta_j = \sum_{j=1}^{k} j\alpha_j$

c) $\sum_{j=1}^{k} j\beta_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} j^2 \alpha_j$

§3. Alcune considerazioni sul θ-metodo ed estensione a una classe di metodi lineari multistep A-stabili.

La classe di metodi lineari ad un passo del primo ordine è data da

3.1 $$y_{n+1} - y_n = h\left[(1-\theta)f_{n+1} + \theta f_n\right]$$

usualmente chiamata "θ-metodo".

Tale metodo è A-stabile se e solo se $\theta \leq \frac{1}{2}$ [3]; in particolare per $\theta = 0$ si ritrova il metodo di Eulero, per $\theta = \frac{1}{2}$ la regola del trapezio risultando solo in questo caso del secondo ordine.

Se la f soddisfa alla condizione (1.2) risulta:

3.2 $$\| f_{n+1} \| \leq \| f_n \| \qquad \forall\, n \in N \ .$$

Infatti componendo scalarmente la (3.1) con $f_{n+1} - f_n$ si ha:

$$0 \geq ((1-\theta)f_{n+1}+\theta f_n, f_{n+1}-f_n) = (2\theta-1)(f_n, f_{n+1}) - \theta \|f_n\|^2 + (1-\theta)\|f_{n+1}\|^2$$

e tenuto conto che $2\theta-1 \leq 0$ e che

$$|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \| y\| \leq \frac{1}{2}(\| x\|^2 + \| y\|^2) \qquad \forall x,y \in R^S$$

si ha: