4 - Ulteriori osservazioni.

Osservazione (1).

Sia ℓ la misura di Lebesgue su $[0,1]$; osserviamo che ogni intervallo I^n ha ampiezza $1-\sum_{k=1}^{n} a_k$, ed essendo tali intervalli in numero di 2^n, risulta

$\ell(P_n) = 2^n(1 - \sum_{k=1}^{n} a_k)$. Siccome $\ell(R_m) = \lim_n \ell(P_n)$,

$\ell(R_m)$ può assumere qualunque valore α, con $0 \leq \alpha \leq 1$.

Osservazione (2).

Posto $\varepsilon_n = 2^n a_n$ le condizioni (5) e (6) diventano

$$(5'') \qquad \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{2^k} < \frac{\varepsilon_n}{2^n}$$

$$(6') \qquad \frac{\varepsilon_n}{2^n} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{2^k}$$

Si vede allora che la (5") sarà verificata se $\varepsilon_n > \varepsilon_{n+k}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e la (6') se $\varepsilon_n \leq \varepsilon_{n+k}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Da questa osservazione si deducono i seguenti criteri:

Proposizione (1).

Considerata la successione $(2^n a_n)$, se questa risulta:

a) crescente, allora $R_m = [0,1]$

b) definitivamente crescente, allora R_m è unione finita di intervalli chiusi

c) strettamente decrescente o tale che esista una sottosuccessione strettamente decrescente, allora R_m è un insieme tipo Cantor.

Osservazione (3).

Dal Teorema (2) segue che R_m è una famiglia diadica (cfr. [4] pag. 151) e risulta

$$R_m = \bigcup_{(\alpha_1,\alpha_2,\dots)\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I^n_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$$

Poiché $(I^n)_n$ è una successione decrescente di chiusi non vuoti il cui diametro tende a zero, per un noto teorema (cfr. [4] pag. 150), $\bigcap_n I^n$ si riduce ad un punto, e quindi appare evidente (come del resto è già noto) che R_m ha la cardinalità del continuo. Tale risultato è più "forte" dell'affermazione: "R_m è una famiglia diadica", perché, data la caratterizzazione di tali famiglie (cfr. [4] pag. 154), sarebbe come affermare semplicemente che R_m è un compatto: ma ciò è ovvio, dato che R_m è perfetto. D'altra parte esistono perfetti che non sono né intervalli chiusi, né unione finita di intervalli chiusi, né insiemi tipo Cantor (in nessuna parte). Ad esempio si consideri

$$P = \{0\} \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} I_n \qquad \text{con} \quad I_n = \left[\frac{1}{n} - \delta_n, \frac{1}{n} + \delta_n\right] \quad \text{e} \quad \delta_n = 1/3n(n+1) .$$

5 - Conseguenze del Teorema (2) per le misure. -

Se $\mathcal{A}$ è una σ-algebra di parti di X ed $m : \mathcal{A} \to [0,+\infty)$ è una misura, allora R_m è sempre chiuso (cfr. [2]), ma può essere finito o no. Considerato il secondo caso e detti $y_1, y_2, \dots$ gli atomi di X, che possiamo considerare come punti di X, l'insieme $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ è al più numerabile, perché per ipotesi $m(X) < +\infty$. Posto $Z=X-Y$, risulta m non atomica su Z e quindi continua (nel senso che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione finita di X in insiemi $X_k \in \mathcal{A}$ tali che $m(X_k) < \varepsilon$). Pertanto il codominio di m su Z sarà tutto $[0,m(Z)]$.

Ne segue:

$$(7) \qquad R_m = [0,m(Z)] + \{0,m(y_1)\} + \{0,m(y_2)\} + \dots = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}[\lambda, \lambda + m(Z)]$$

dove