Osservazione (9.3)

Il risultato precednete vale anche se $\mathcal{A}$ è solo un'algebra ed m è una msira finita strettamente positiva su $\mathcal{A}$.

Infatti basta sostituire nella dim. 1 a $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ ed $\bigwedge_{i\in J} A_i$ ($m(1) < +\infty$ per ipotesi).

§ 10 - m-ideali, m-filtri. Algebre quozienti.

DEF. Se $\mathcal{A}$ è un'algebra Booleana m-completa ed $\mathfrak{J}$ è un suo ideale, diremo che è m-completo o m-ideale se

$$\{A_i;\ i \in I\} \subset \mathfrak{J} \text{ e card } I \leq m \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathfrak{J}$$

Definizione analoga (la duale) si dà per gli m-filtri.

Esempio. A) $\mathfrak{J} = \{ A \subset X;\ \text{card } A \leq m \}$ è un m-ideale dell'algebra $\mathcal{P}(X)$ e $\mathfrak{J}^* = \{ A \subset X;\ \text{card}(X - A) \leq m \}$ è un m-filtro.

DEF. Se $\mathfrak{J}$ è un ideale di $\mathcal{A}$ posto

$A \sim B \iff A-B \in \mathfrak{J}$ e $B-A \in \mathfrak{J}$ ($\iff A \triangle B \in \mathfrak{J}$ cfr. §2 prop. 1) risulta $\sim$ una relazione di equivalenza su $\mathcal{A}$ e l'insieme delle classi di equivalenza $\{[A];\ A \in \mathcal{A}\}$

sarà denotato con $\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{I}}$ e chiamato <u>algebra quoziente</u> di $\mathcal{A}$ su $\mathfrak{I}$.

<u>Prop.</u> (10.1) Posto $[A] \cup [B] = [A \cup B], [A] \cap [B] = [A \cap B], -[A] = [-A]$

risulta $\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{I}}$ un'algebra Booleana e posto

$$h(A) = [A]$$

h risulta un omomorfismo di $\mathcal{A}$ su $\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{I}}$ detto <u>omomorfismo naturale</u>.

Poiché un omomorfismo trasforma 0 in 0 e 1 in 1 si ha $[0]$ e $[1]$ sono lo zero ee l'unità di $\frac{A}{\mathfrak{I}}$.

DEF. Col simbolo $\frac{\mathcal{A}}{E}$ se $E \in \mathcal{A}$ si denota l'insieme $\{A \in \mathcal{A} : A \subset E\}$. E' un'algebra Booleana, con le stesse $\cup$ e $\cap$ di $\mathcal{A}$.

DEF. Se $\mathfrak{F}$ è un <u>filtro</u> col simbolo $\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{F}}$ si deve intendere l'algebra quoziente $\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{I}}$ dove $\mathfrak{I}$ è l'ideale duale di $\mathfrak{F}$ cioé

$\mathfrak{I} = \{-A;\ A \in \mathfrak{F}\}$

<u>Lemma</u> (10.2) $[A] \subset [B] \Longleftrightarrow A - B \in \mathfrak{I}$

DIM. $[A] \subset [B] \Longleftrightarrow [A-B] = [A] - [B] = [0] \Longleftrightarrow A - B \in \mathfrak{I}$

cvd.

<u>Teorema</u> (10.3). Se $\mathfrak{I}$ è un m-ideale di una m-algebra $\mathcal{A}$, allora $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$ è una m-algebra e $\forall \{A_i;\ i \in I\} \subset \mathcal{A}$ con card $I \leq m$ risulta

(1) $\bigcup_{i \in I} [A_i] = [\bigcup_{i \in I} A_i]$ e $\bigcap_{i \in I} [A_i] = [\bigcap_{i \in I} A_i]$

DIM.

Poiché $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$, basterà provare la (1) per avere che $\frac{A}{\mathfrak{I}}$ è una m-algebra.

Sia $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Per provare la (1) basta provare che

a) $[A_i] \subset [A]$ $\forall i \in I$ e che

b) $[A_i] \subset [A_0]$ $\forall i \in I \Longrightarrow [A] \subset [A_0]$

Ma per il lemma (10.2) questo equivale a provare che

a') $A_i - A \in \mathfrak{J}$ $\quad \forall\, i \in I$

b') $A_i - A_0 \in \mathfrak{J}$ $\quad \forall\, i \in I \Longrightarrow A - A_0 \in \mathfrak{J}$

Ora la a') è vera in quanto $A_i - A = 0 \in \mathfrak{J}$ e la b') è vera perché da $A_i = A_0 \in \mathfrak{J}$ $\forall i \in I$ $\Longrightarrow A - A_c = \bigcup_{i\in I} (A_i - A_0) \in \mathfrak{J}$ perché $\mathfrak{J}$ è un m-ideale.

cvd

<u>Osservazione</u> (10.1). La (1) non vale in generale se card I > m. Però qualche volta il grado di completezza di $\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{J}}$ può essere superiore a quello di $\mathcal{A}$ e di $\mathfrak{J}$.

<u>Esempi</u>

B) Sia m una n-misura su una n-algebra $\mathcal{A}$. Posto $\mathfrak{J} = \{A \in \mathcal{A} : m(A) = 0\}$ si ha che $\mathfrak{J}$ è un n-ideale, infatti $A \in \mathfrak{J}$ e $B \subset A \Longrightarrow B \in \mathfrak{J}$ (perché $m(B) \leq m(A) = 0$) ed $\mathfrak{J}$ è chiuso rispetto all'$\bigcup_{i\in I}$ con card $I \leq n$, perché $m(\bigcup_{i\in I} A_i) \leq \sum_{i\in I} m(A_i)$ (cfr. NB. Prop. (9.3)).

In particolare se m è una σ-misura su una σ-algebra $\mathcal{A}$, allora $\mathfrak{J}$ è un σ-ideale. Per il T(10.3) $\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{J}}$ è anch'essa una σ-algebra. Tuttavia se m è una σ-misura finita (o σ-finita) allora $\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{J}}$ è un'algebra completa.

Infatti posto $m'([A]) = m(A)$ $\forall A \in \mathcal{A}$ m' è una σ-misura strettamente positiva su $\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{J}}$, ed è finita (o σ-finita) se lo è m. $\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{J}}$ è quindi completa per la prop. (9.4).

C) Il risultato segnalato in B) vale anche se m è solo una <u>misura finita</u> (non necessariamente σ-misura) su una σ-algebra $\mathcal{A}$.

Infatti vale il seguente:

<u>Teorema</u> (10.4) (Smith e Tarski 1957)

Se $\mathcal{A}$ è una m-algebra, $\mathfrak{J}$ è un ideale m'-completo $\forall$ m'< m, e $\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{J}}$

soddisfa la considizione di m-catena, allora $\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{I}}$ è completo (cfr. [1] pag. 76).

Nel nostro caso essendo m solo una misura $\mathfrak{I}$ è solo un ideale (non σ-completo, in generale). Definita m' come in B) risulta m' una misura sull' algebra $\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{I}}$, finita e strett. positiva. Data la finitezza di m' e la stretta positività, non può esistere un insieme $\{A_i, i \in I\} \subset \frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{I}}$ disgiunti con card $I > \aleph_0$ (cfr. l'osservazione (9.3)), quindi $\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{I}}$ verifica la condizione di σ-catena e quindi per il Teor. (10.4) $\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{I}}$ è completa.

D) Ricordiamo che in uno sp. topologico X si dice

A <u>perfetto</u> $\overset{\cdot}{\iff}$ $A = \text{Dr}.A$; A <u>denso in sé</u> $\overset{\cdot}{\iff}$ $A \subset \text{Dr}.A$

A <u>in nessuna parte denso</u> (o <u>rarefatto</u>) $\overset{\cdot}{\iff}$ $\overset{\circ}{\bar{A}} = \emptyset$ ($\iff$ $\overset{\circ}{\overline{A'}} = X$) .

Se consideriamo $\mathfrak{I}_0 = \{ A \subseteq X : \overset{\circ}{\bar{A}} = \emptyset \}$, $\mathfrak{I}$ è un <u>ideale</u> di $\mathcal{P}(X)$. Infatti è ovvio che se $B \subset A \in \mathfrak{I}_0 \Longrightarrow B \in \mathfrak{I}_0$. Osservato che $A \in \mathfrak{I}_0 \iff \bar{A} \in \mathfrak{I}_0$ per provare che $\mathfrak{I}_0$ è chiuso per l'unione, basta provarlo per i chiusi. Siano A e B chiusi e $\in \mathfrak{I}_0$, allora $A \cup B$ è un chiuso e se per assurdo $\exists\ \emptyset \neq U$ aperto $\subset A \cup B$ allora questo non può essere contenuto in uno solo dei due, pertanto $U - B \neq \emptyset$, è un aperto ed è contenuto in A (contraddizione).

Un celebre esempio di insieme perfetto in nessuna parte denso è l'<u>insieme di Cantor</u> C , che è di misura (di Lebesegue) zero (cfr. [3]' Cap. 6 pag. 5 oppure [7] pag. 85 e seguenti).

Un insieme $N \subset X$ si dice di <u>prima categoria</u> $\overset{\cdot}{\iff}$ $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ con $\overset{\circ}{\bar{I}}_n = \emptyset$

Posto $\mathfrak{I}_1 = \{ N \subseteq X : N$ di 1^a categoria$\}$ risulta $\mathfrak{I}_0 \subset \mathfrak{I}_1$ e $\mathfrak{I}_1$ è un <u>σ-ideale</u> di $\mathcal{P}(X)$.

Sorprendentemente se $X = \mathbb{R}$ e μ è la misura di Lebesgue:

(2) $\exists\ N \subset \mathfrak{I}_1$ tale che $\mu(-N) = 0$ ed $\mathbb{R} = N \cup (-N)$

cioé $\mathbb{R}$ è l'unione di un insieme di 1^a categoria ed uno di misura nulla.

Sia $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \ldots\}$ e sia $I_{n,m}$ l'intervallo aperto di centro q_n ed ampiezza $\frac{1}{2^{n+m}}$. Posto $G_m = \bigcup_{n=1} I_{n,m}$ risulta G_m aperto, $G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset \mathbb{Q}$, e $\mu(G_m) \leq \frac{1}{2^m}$. Pertanto se $G = \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m$ risulta $\mu(G)=0$.

Basta ora porre $N = -G$ per avere l'asserto, essendo $N = \bigcup_{m=1}^{\infty} (-G_m)$ e $\overset{\circ}{\overline{-G_m}} = \widehat{-G_m} = -\overline{G_m} = -\mathbb{R} = \emptyset$.

Ricordiamo ancora che la classe $\mathcal{B}$ degli insiemi di Borel è il più piccolo σ-campo contenente tutti gli aperti di X, e che $A \subseteq X$ si dice che ha la proprietà di Baire se $\exists\, G$ aperto di X tale che $A \triangle G \subset \mathcal{J}_1$.

Denotiamo con $\mathcal{B}_1$ la classe di quest'ult'ultimi insiemi:

$\mathcal{B}_1$ è un σ-campo. Infatti se $A \in \mathcal{B}_1$ e G è un aperto tale che $A \triangle G \in \mathcal{J}_1$, basta osservare che $-\bar{G}$ è aperto e risulta

(*) $(-A) - (-\bar{G}) = \bar{G} - A = (\partial G \cup G) - A \subset \partial G \cup G - A \in \mathcal{J}_1$

perché $G - A \in \mathcal{J}_1$ e $\overset{\circ}{\overline{\partial G}} = \overset{\circ}{\partial G} = \overbrace{\bar{G} \cap \overline{-G}}^{\circ} = \overset{\circ}{\bar{G}} \cap \overset{\circ}{\overline{-G}} = \overset{\circ}{\bar{G}} - \overset{\circ}{\bar{G}} =$ (G è aperto) $= G - \bar{G} = \emptyset$.

La (*) insieme alla $-\bar{G} - (-A) = A - \bar{G} \subset A - G \subset \mathcal{J}_1$, portano che $-A \in \mathcal{B}_1$.

Se poi $A_n \in \mathcal{B}_1$ per $n = 1,2,\ldots$ e se G_n è un aperto tale che $A_n \triangle G_n \in \mathcal{J}_1$, posto $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ ed $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, risulta

$$A - G \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - G_n) \in \mathcal{J}_1; \quad G - A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n - A_n) \in \mathcal{J}_1 \quad \text{e quindi}$$

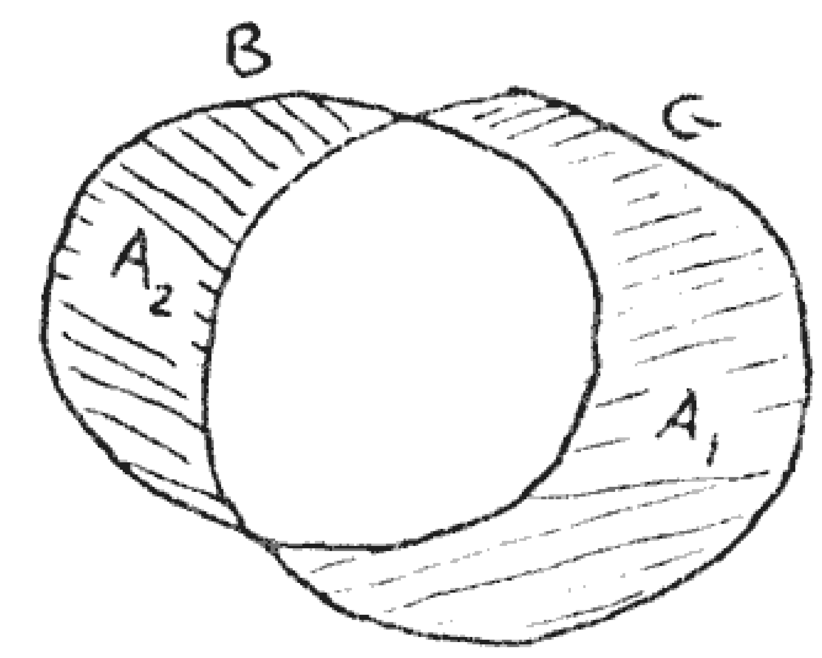
$$A \triangle G \in \mathcal{J}_1 \quad \text{e} \quad A \in \mathcal{B}_1 .$$

Poiché se G è un aperto, evidentemente $G \in \mathcal{B}_1$ segue che

$$(3) \qquad \mathcal{B} \subset \mathcal{B}_1$$

Se denotiamo con $\mathcal{J} = \mathcal{B} \cap \mathcal{J}_1$, per cui $\mathcal{J}$ è un σ-ideale del σ-campo $\mathcal{B}$, risulta $\mathcal{B}/\mathcal{J}$ una σ-algebra per il teorema (10.3), ma facciamo vedere che è addirittura un'<u>algebra Booleana completa</u> (discorso analogo si può fare per $\mathcal{B}_1$).

Se $B \in \mathcal{B}$, allora (tenuto presente che $B \in \mathcal{B}_1$) G aperto tale che $B \Delta G \in \mathcal{J}$, o equivalentemente B è della forma $B = (G-A_1) \cup A_2$ con $A_1, A_2 \in \mathcal{J}$.



Pertanto $[B] = [G]$ e quindi

$$\mathcal{B}/\mathcal{J} = \{[G] \ ; \ G \text{ aperto in } X\}.$$

Consideriamo $A'_t = [G_t]$, con G_t aperto, per $t \in T$ e T arbitrario. Vedremo che $\bigcup_{i \in T} A'_t \in \mathcal{B}/\mathcal{J}$. Sia $G = \bigcup_{t \in T} G_t$ (unione insiemistica) e poniamo $A' = [G]$. Faremo vedere che A' è l'unione Booleana delle A'_t. Per la a') e b') del teorema (10.3) basterà far vedere che:

a') $G_t - G \in \mathcal{J} \quad \forall t \in T$

b') $A_0 \in \mathcal{B}$ e $G_t - A_0 \in \mathcal{J} \quad \forall\, t \in T \Longrightarrow G - A_0 \in \mathcal{J}$.

La a') è ovvia in quanto $G_t - G = \emptyset$.

Sia ora $A_0 \in \mathcal{B}$ e $G_t - A_0 \in \mathcal{J}$ $\forall\, t \in T$, poiché $G_t - A_0 = (G-A_0) \cap G_t$ risulta $G_t - A_0$ aperto in $G-A_0$, allora $G-A_0$ risultando unione di aperti (in $G-A_0$) di prima categoria è di prima categoria (cfr. per es. [6] pag. 201), cioé $G-A_0 \in \mathcal{J}$.

Osserviamo che in prativa si è provato che

(4) $\quad \bigcup_{t \in T} [G_t] = [\bigcup_{t \in T} G_t]$

ma questo non vuol dire che la (4) vale $\forall\ A_t \in \mathcal{B}$ $(t \in T)$, infatti $\{x_t\} \in \mathcal{B}$ ma non è detto che sia

$\bigcup_{t\in T} [\{x_t\}] = [\bigcup_{t\in T} \{x_t\}]$ e questo perché potrebbe non essere $\bigcup_{t\in T} \{x_t\} \in \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ non è completa in generale).

Dalla (4) passando ai complementari si ha se F_t sono chiusi:

$$(4') \qquad \bigcap_{t\in T} [F_t] = [\bigcap_{t\in T} F_t] .$$

Osservazione (10.2). Abbiamo visto (cfr. Osserv. (9. 0)) che se $\mathcal{A}$ ed $\mathcal{A}'$ sono isomorfe ed $\mathcal{A}$ è m-completa (completa) allora tale è anche $\mathcal{A}'$, però se due algebre sono complete non è affatto detto che siano isomorfe. Si veda a proposito il seguente esempio.

Esempio E). Sia $\mathcal{B}$ la σ-algebra dei Boreliani di $\mathbb{R}$, μ la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$, $\mathcal{J}_0 = \{A \in \mathcal{B} : \mu(A) = 0\}$ $\mathcal{J}_1 = \{A \in \mathcal{B};\ A \text{ di } 1^a \text{ categoria}\}$.
Le algebre Booleane $\mathcal{A}_0 = \mathcal{B}/\mathcal{J}_0$ ed $\mathcal{A}_1 = \mathcal{B}/\mathcal{J}_1$ sono entrambe complete, per quanto visto negli esempi B) e D), ma non sono isomorfe.

Premettiamo il seguente risultato:

Lemma (10.5)

Se $\mathcal{A}$ ed $\mathcal{A}'$ sono σ-algebre, $h : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ è un isomorfismo surgettivo, $m' : \mathcal{A}' \to [0,+\infty]$ è una σ-misura, σ-finita e non identicamente nulla, allora posto $\forall A \in \mathcal{A}$

$$m(A) = m'(h(A))$$

m è una σ-misura, σ-finita e non identicamente nulla.

(Basta tenere presente la prop. 6 del §3 e la (4) del §8).

Supponiamo quindi che siano $\mathcal{A}_0$ ed $\mathcal{A}_1$ isomorfe e sia $h : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_0$ un isomorfismo. Su $\mathcal{A}_0$, μ induce una σ-misura, σ-finita e non identicamente nulla, ponendo

$$m([A]_0) = \mu(A) \qquad \forall A \in \mathcal{B}$$

Tale misura è strettamente positiva. Posto $\forall A' \in \mathcal{A}_1$

$$m'(A') = m(h(A'))$$

risulta che m' ha le stesse proprietà di m per il Lemma (10.5) m' induce a sua volta su $\mathcal{B}$ una σ-finita, σ-misura ν ponendo

$$\nu(A) = m'([A]_1) \qquad \forall A \in \mathcal{B} .$$

Tale misura sarà nulla su $\mathcal{J}_1$. Per il Teorema di Teoria della misura (cfr. [1] pag. 77), analogo ad riultato (2), $\exists\, A_0 \in \mathcal{B}$ con $\nu(A_0) = 0$ ed $\exists\, A_1 \in \mathcal{J}_1$ $\ni'$ $\mathbb{R} = A_0 \cup A_1$; ma questo porta che ν e poi m' ed m sono identicamente nulle (assurdo).

§11. - m-omomorfismi, atomi, ed interpretazione negli spazi di Stone.

DEF. Siano $\mathcal{A}$ ed $\mathcal{A}'$ due algebre Booleane ed $h : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ un omomorfismo.

Supponiamo che esistano:

$$(1) \quad A = \bigcup_{t\in T}^{\mathcal{A}} A_t \qquad \text{e} \qquad \bigcup_{t\in T}^{\mathcal{A}'} h(A_t) \quad (2)$$

Da $A_t \subset A$ segue che $h(A_t) \subset h(A)$ e quindi $\bigcup_{t\in T}^{\mathcal{A}'} h(A_t) \subset h(A)$.

Orbene diremo che l'omomorfismo h preserva l'unione Boolena (1) se esiste la (2) e risulta:

$$(3) \qquad h(A) = \bigcup_{t\in T}^{\mathcal{A}'} h(A_t) \quad .$$

Analogamente si definisce un omomorfismo che preserva l'intersezione .

Diremo che h è un m-omomorfismo se preserva tutte le unioni (1) (e quindi tutte le intersezioni), con card $T \leq m$.

L'omomorfismo h si dice poi completo se è un m-omomorfismo $\forall m$.