ALGEBRE BOOLEANE E MISURE FINITAMENTE ADDITIVE

E. BARONE

Introduzione. - Questi appunti, tratti principalmente da Roman Sikorski: Boolean Algebras (nel seguito richiamato con [1]), hanno lo scopo di provare che una misura finitamente additiva m definita su un campo d'insiemi $\mathscr{A}$, può essere riguardata come una misura σ-additiva (cfr.§ 1 e 2 per le def.) se si considera definita su un'altro campo $\mathscr{A}^*$ isomorfo ad $\mathscr{A}$. Precisamente: dato il campo d'insiemi $\mathscr{A}$, si considera l'insieme $[\mathscr{A}]$ degli ultrafiltri su $\mathscr{A}$, detto spazio di Stone di $\mathscr{A}$ (cfr. § 7); posto

$$h(A) = \{\beta \in [\mathscr{A}] : A \in \beta\} = A^* \qquad \text{per ogni } A \in \mathscr{A},$$

risulta definito un omomorfismo h di A in $\mathscr{P}([\mathscr{A}])$ e $\mathscr{A}^* = h(\mathscr{A})$ è un campo isomorfo ad $\mathscr{A}$. $\mathscr{A}^*$ considerata come base degli aperti su $[\mathscr{A}]$, induce una topologia che rende $[\mathscr{A}]$ spazio topologico compatto e totalmente sconnesso ed $\mathscr{A}^*$ coincide con il campo dei sottoinsiemi di $[\mathscr{A}]$ contemporaneamente aperti e chiusi (clopen). Su $\mathscr{A}^*$ si può definire una misura ponendo

$$m^*(A^*) = m(A) \qquad \forall A \in \mathscr{A}.$$

Poiché se $\emptyset \neq A_n \in \mathscr{A}^*$ e $A_n \cap A_m = \emptyset$, necessariamente $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \notin \mathscr{A}^*$, si ha che m^* è una misura σ-additiva, che può essere prolungata sul σ-campo $\mathscr{A}^*_\sigma$ generato da $\mathscr{A}^*$.

Questa costruzione permette di ricavare informazioni per le misure, traendole dalla teoria delle σ-misure su σ-campi. A titolo di esempio se denotiamo con R_m il codomino della misura m, risulta

$$\overline{R}_m = \overline{\{m^*(A^*) : A^* \in \mathscr{A}^*\}} = \{m^*(A) : A \in \mathscr{A}^*_\sigma\}$$

e quindi ogni informazione sul codominio di una σ-misura è un'informazione su $\overline{R}_m$.

Nel § 12, interamente dedicato alle applicazioni del teorema di rappresentazione di Stone alla teoria della misura, si fa vedere tra l'altro una possibile genesi delle funzioni misurabili rispetto ad un'algebra, introdotte e studiate da G.H.Greco in [8].

Questi appunti sono il contenuto di alcuni seminari tenuti dall'Autore presso l'Università di Lecce.

Lecce, 28/3/1982