ALGEBRE BOOLEANE E MISURE FINITAMENTE ADDITIVE

E. BARONE

Introduzione. - Questi appunti, tratti principalmente da Roman Sikorski: Boolean Algebras (nel seguito richiamato con [1]), hanno lo scopo di provare che una misura finitamente additiva m definita su un campo d'insiemi $\mathscr{A}$, può essere riguardata come una misura σ-additiva (cfr.§ 1 e 2 per le def.) se si considera definita su un'altro campo $\mathscr{A}^*$ isomorfo ad $\mathscr{A}$. Precisamente: dato il campo d'insiemi $\mathscr{A}$, si considera l'insieme $[\mathscr{A}]$ degli ultrafiltri su $\mathscr{A}$, detto spazio di Stone di $\mathscr{A}$ (cfr. § 7); posto

$$h(A) = \{\beta \in [\mathscr{A}] : A \in \beta\} = A^* \qquad \text{per ogni } A \in \mathscr{A},$$

risulta definito un omomorfismo h di A in $\mathscr{P}([\mathscr{A}])$ e $\mathscr{A}^* = h(\mathscr{A})$ è un campo isomorfo ad $\mathscr{A}$. $\mathscr{A}^*$ considerata come base degli aperti su $[\mathscr{A}]$, induce una topologia che rende $[\mathscr{A}]$ spazio topologico compatto e totalmente sconnesso ed $\mathscr{A}^*$ coincide con il campo dei sottoinsiemi di $[\mathscr{A}]$ contemporaneamente aperti e chiusi (clopen). Su $\mathscr{A}^*$ si può definire una misura ponendo

$$m^*(A^*) = m(A) \qquad \forall A \in \mathscr{A}.$$

Poiché se $\emptyset \neq A_n \in \mathscr{A}^*$ e $A_n \cap A_m = \emptyset$, necessariamente $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \notin \mathscr{A}^*$, si ha che m^* è una misura σ-additiva, che può essere prolungata sul σ-campo $\mathscr{A}^*_\sigma$ generato da $\mathscr{A}^*$.

Questa costruzione permette di ricavare informazioni per le misure, traendole dalla teoria delle σ-misure su σ-campi. A titolo di esempio se denotiamo con R_m il codomino della misura m, risulta

$$\overline{R}_m = \overline{\{m^*(A^*) : A^* \in \mathscr{A}^*\}} = \{m^*(A) : A \in \mathscr{A}^*_\sigma\}$$

e quindi ogni informazione sul codominio di una σ-misura è un'informazione su $\overline{R}_m$.

Nel § 12, interamente dedicato alle applicazioni del teorema di rappresentazione di Stone alla teoria della misura, si fa vedere tra l'altro una possibile genesi delle funzioni misurabili rispetto ad un'algebra, introdotte e studiate da G.H.Greco in [8].

Questi appunti sono il contenuto di alcuni seminari tenuti dall'Autore presso l'Università di Lecce.

Lecce, 28/3/1982

§ 1. Premesse e definizioni.-

DEFINIZIONE 1. - *Un'algebra Booleana* è un insieme $\mathscr{A} \neq \emptyset$ in cui sono definite due operazioni binarie $\cup$, $\cap$ ed una unaria $-$, che hanno grosso modo le proprietà dell'unione, dell'intersezione e del complementare di sottoinsiemi di un insieme dato.

Formalmente un'algebra deve verificare i seguenti assiomi:

(A1) $A \cup B = B \cup A$ $\quad A \cap B = B \cap A$ commutatività

(A2) $A \cup (B \cup C) - (A \cup B) \cup C$ $\quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ associatività

(A3) $(A \cap B) \cup B = B$ $\quad (A \cup B) \cap B = B$ assorbimento

(A4) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ distributività

(A5) $(A \cap -A) \cup B = B$; $(A \cap -A) \cap B = B$

Porremo inoltre per definizione

DEFINIZIONE 2.-(1) $A \subset B$ (o $B \supset A$) $\overset{def}{\Longleftrightarrow} A \cap B = A \Longleftrightarrow A \cup B = B$

e si prova che $\subset$ è una relazione d'ordine parziale su $\mathscr{A}$.
L'(A3) può allora essere interpretato come

$$(2) \qquad A \cap B \subset B \qquad e \qquad B \subset A \cup B$$

e l'(A5) come:

$$(3) \qquad A \cap -A \subset B \subset A \cup -A$$

DEFINIZIONE 3. - Poiché si può provare che $A \cap -A = B \cap -B$ $\forall A, B \in \mathscr{A}$, $A \cap -A$ non dipende dalla scelta di A e sarà denotato con 0 e chiamato *zero* di $\mathscr{A}$.. Analogamente poiché $A \cup -A$ non dipende dalla scelta di $A \in \mathscr{A}$, sarà denotato con 1 e chiamato *unità* di $\mathscr{A}$.

Dalla (3) segue che $\forall A \in \mathscr{A}$:

$$(4) \qquad 0 \subset A \subset 1$$

e l'(A5) può essere scritto

$$(5) \qquad 0 \cup B = B \qquad 1 \cap B = B .$$

DEFINIZIONE 4. - Un'algebra Booleana si dice *degenere* se e solo se è formata da un unico elemento. In tal caso $0 = 1$.

PRINCIPIO DI DUALITA'. - Negli assiomi (A1) - (A5), $\cup$ e $\cap$ giocano un ruolo simmetrico, pertanto se una proprietà è vera, da questa se ne può ottenere un'altra (vera) detta la duale della prima, sostituendo all'$\cup$ l'$\cap$ e viceversa.

Si dovrà inoltre sostituire

$1 \to 0 \qquad 0 \to 1 \qquad \subset \to \supset \qquad \supset \to \subset$

per come sono stati definiti.

Con riferimento alla relazione d'ordine $\subset$ osserviamo che

$$(6) \qquad A \cup B = \min \{C : \begin{matrix}A\\B\end{matrix} \subset C\} = \sup\{A,B\}$$

$$(7) \qquad A \cap B = \max \{C : C \subset \begin{matrix}A\\B\end{matrix}\} = \inf\{A,B\}$$

Per provare la (6) basta osservare che

1) $\begin{matrix}A\\B\end{matrix} \subset A \cup B$; 2) se poi $\begin{matrix}A\\B\end{matrix} \subset C$ allora $A \cup B \subset C$ e quindi $A \cup B = \sup\{A,B\}$;

per la 2) basta provare che da $\begin{matrix}A\cup C = C\\ B\cup C = C\end{matrix}$ segue $(A \cup B) \cup C = C$: $\overset{\text{infatti}}{\smile}$ $(A \cup B)\cup C = (A\cup C)\cup B = C \cup B = C$.

In breve possono essere provate molte delle familiari proprietà della teoria degli insiemi, ad esempio le formule di De Morgan

$$(8) \qquad -(A \cup B) = -A \cap -B \qquad\qquad -(A \cap B) = -A \cup -B \qquad \text{ecc.}$$

DEFINIZIONE 5. - Porremo $A - B \doteq (-B) \cap A$ (differenza di A e B o A meno B)

$A \to B \doteq (-A) \cup B$ (è la duale di B-A)

Questa seconda operazione gioca un ruolo importante nell'applicazione della teoria dell'algebre Booleane alla logica matematica. Inoltre porremo :

$A \vartriangle B \doteq (A-B) \cup (B - A)$ (differenza simmetrica di A e di B) .

DEFINIZIONE 6. - A e B si dicono disgiunti se $A \cap B = 0$

Esempi - A) Se $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ lo chiamiamo campo (field) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $A,B \in \mathscr{A} \Longrightarrow A \cup B \in \mathscr{A}$ e $A \in \mathscr{A} \Longrightarrow -A \in \mathscr{A}$

(Dalle leggi di De Morgan segue che $A,B \in \mathscr{A} \Longrightarrow A \cap B,\ A-B,\ A \vartriangle B \in \mathscr{A}$ $\emptyset, X \in \mathscr{A}$).

Ogni campo è un'algebra Booleana rispetto alle ordinarie $\cup$, $\cap$ e $-$.

Esempi di campi e quindi di algebre sono i seguenti:

1) $\mathcal{P}(X)$

2) $\{A \subset X : A$ finito oppure $-A$ finito$\}$

3) $\{P \subset \mathbb{R} : P$ plurintervallo (finito)$\}$ (cioé unioni finite di intervalli qualsiasi di $\mathbb{R}$

4) Se X è uno spazio topologico $\{A \subset X : A$ chiuso e aperto (=clopen)$\}$

5) Se X è uno spazio topologico $\{A \subset X : \overset{\circ}{\widehat{\partial A}} = \emptyset\}$ con ∂A frontiera di A

$$(\partial A \cup B),\ \partial(A \cap B) \subset (\partial A) \cup (\partial B);\ \partial(-A) = \partial A;\ \overset{\circ}{\widehat{C \cap D}} = \overset{\circ}{C} \cap \overset{\circ}{D};\ \overset{\circ}{C} \cup \overset{\circ}{D} \subset \overset{\circ}{\widehat{C \cup D}})$$

NB. GLI SPAZI TOPOLOGICI CHE CONSIDEREREMO SONO SEMPRE T2 (cfr.[3] pag. 555)

B) *Esempi di algebre che non sono campi.*

Sia X uno spazio topologico. Si dice

$$C \text{ chiuso regolare} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} C = \overline{\overset{\circ}{C}} \quad \text{(è un dominio)}$$

$$A \text{ aperto regolare} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists C \text{ chiuso } \ni' A = \overset{\circ}{C}\ .$$

Denotiamo con $\mathcal{A}_1$ l'insiemme dei chiusi regolari e con $\mathcal{A}_2$ l'insieme degli aperti regolari.

Su $\mathcal{A}_1$ consideriamo le seguenti operazioni:

$\cup \doteq$ unione; $A \cap B \doteq \overline{\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}}$, $-A \doteq \overline{A'}$ dove A' è il complementare di A.

Con tali leggi $\mathcal{A}_1$ è un'algebra Booleana.

Su $\mathcal{A}_2$ consideriamo le seguenti operazioni:

$A \cup B \doteq \overset{\circ}{\overline{A \cup B}}$, $\cap \doteq$ intersezione , $-A \doteq \overset{\circ}{\widehat{A'}}$

$$(\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}\ ;\ \overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y})$$

C) La totalità degli *eventi*, in teoria delle probabilità con "o" , "e", "non" formano un'algebra Booleana.

D) L'insieme di tutte le "*formule*" di una teoria basata sulla logica a 2 valori, nel quale si identificano due formule equivalenti (α e β sono equivalenti se $\alpha \Longleftrightarrow \beta$ è un teorema), con le operazioni $\vee, \wedge, \sim$ è un'algebra Booleana detta algebra di Tarski-Lindenbaum.

§ 2- Ideali e Filtri. Sia $\mathscr{A}$ un'algebra Booleana.

DEFINIZIONE 7. - $\emptyset \neq \mathscr{I} \subset \mathscr{A}$ è detto ideale $\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{(a) } A,B \in \mathscr{I} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{I} \\ \text{(b) } B \in \mathscr{I},\ A \subset B \Rightarrow A \in \mathscr{I} \end{cases}$

$(\Leftrightarrow B \in \mathcal{J}\ ,\ A \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{J})$

PROP. 1 - (a) $\wedge$(b) $\Longleftrightarrow (A \cup B \in \mathscr{I} \Longleftrightarrow A \in \mathscr{I} \wedge B \in \mathscr{I})$

DEFINIZIONE 8. - Un ideale $\mathscr{I}$ di $\mathscr{A}$ si dice proprio se $\mathscr{I} \neq \mathscr{A}$.

PROP. 2 - $\mathscr{I}$ ideale proprio $\Longleftrightarrow 1 \notin \mathscr{I}$

($\Leftarrow$ banale, $\Rightarrow$ Se per assurdo $1 \in \mathscr{I}$ dalla (b) segue $\mathscr{A} = \mathscr{I}$)

PROP. 3 - $\mathscr{I}_i$ ideale $\forall i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} \mathscr{I}_i$ è un ideale.

DEFINIZIONE 9. - Se $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$, diciamo ideale generato da

$$\mathscr{I}(\mathscr{B}) = \bigcap \{\mathscr{I} : \mathscr{I} \text{ ideale} \supset \mathscr{B}\}$$

Se $\mathscr{B} = \emptyset$ $\quad \mathscr{I}(\mathscr{B}) = \{0\}$

PROP. 4 - Se $\mathscr{B} \neq \emptyset$, posto $\mathscr{I}' = \{A \in \mathscr{A} : \exists A_1, \dots, A_n \in \mathscr{B} \ni' A \subset A_1 \cup \dots \cup A_n\}$ risulta $\mathscr{I}' = \mathscr{I}(\mathscr{B})$. (Se $\mathscr{B} \subset \mathscr{I}$ allora $\mathscr{I}' \subset \mathscr{I}$ e quindi $\mathscr{I}' \subset \mathscr{I}(\mathscr{B})$. Si prova poi che $\mathfrak{I}'$ è un ideale $\supset \mathscr{B}$ e quindi $\mathscr{I}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{I}'$

In particolare se $A \in \mathscr{A}$ $\quad \mathfrak{I}(\{A\}) = \{B \in \mathscr{A} : B \subset A\} = \mathscr{A} \cap \mathscr{P}(A)$.

DEFINZIONE 10. $\emptyset \neq \mathscr{F} \subset \mathscr{A}$ filtro $\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{(a)' } A,B \in \mathscr{F} \Longrightarrow A \cap B \in \mathscr{F} \\ \text{(b)' } B \in \mathscr{F};\ A \supset B \Longrightarrow A \in \mathscr{F} \end{cases}$ $\Leftrightarrow (A \cap B \in \mathscr{F} \Leftrightarrow A, B \in \mathscr{F}$.

PROP. 5 - La nozione di filtro è duale a quella di ideale, cioé

$\mathscr{I}$ ideale $\Longrightarrow \{- A : A \in \mathscr{I}\}$ è un filtro

$\mathscr{F}$ filtro $\Longrightarrow \{- A : A \in \mathscr{F}\}$ è un ideale

In particolare

PROP. 4' - Se $\mathscr{B} \neq \emptyset$ e se $\mathscr{F}(\mathscr{B})$ è il filtro generato da $\mathscr{B}$ allora $\mathscr{F}(\mathscr{B}) = \{ A \in \mathscr{A} : \exists A_1, \dots, A_n \in \mathscr{B} : A_i \cap \dots \cap A_n \subset A \}$; deve pertanto essere $A_1 \cap \dots \cap A_n \neq \emptyset$ se non si vuole che sia $\mathscr{F}(\mathscr{B}) = \mathscr{A}$.

L'$\cap$ di filtri é un filtro, mentre $\mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2$ non é detto che sia un filtro.

ESEMPI A) Se $C \in \mathscr{A}$: $\{A \in \mathscr{A} : A \subset C\} = \mathscr{I}(c)$ è un ideale (generato da C) detto principale. Dualmente $\{A \in \mathscr{A} : A \supset C\}$ è un filtro (generato da C) e detto principale.

B) Sia $\mathscr{A} = \mathscr{P}(X)$ con X infinito. $\{A \subset X : A \text{ finito}\}$ è un ideale non principale. $\{A \subset X : A' \text{ finito}\}$ è un filtro non principale.

C) $m : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$, dove $\mathscr{A}$ è un'algebra Booleana, è detta una misura(*) se $\exists A_0 \in \mathscr{A} \ni' m(A_0) < +\infty$ e $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ se $A \cap B = 0$ e $A, B \in \mathscr{A}$

$$\{A \in \mathscr{A} : m(A) = 0\} \text{ è un ideale.}$$

§ 3- Omomorfismi, isomorfismi.

DEFINIZIONE 11 - Date due algebre Booleane $\mathscr{A}$ ed $\mathscr{A}_1$ l'applicazione $h : \mathscr{A} \to \mathscr{A}_1$ è detta omomorfismo se e solo se

(a) $h(A \cup B) = h(A) \cup h(B)$

(a') $h(A \cap B) = h(A) \cap h(B)$

(b) $h(-A) = - h(A)$

(basta (b) e una delle due : (a) o (a')).

Segue facilmente:

PROP. 6 - $h(A-B) = h(A) - h(B)$; $h(0) = 0$; $h(1) = 1$; $A \subset B \Rightarrow h(A) \subset h(B)$.

PROP. 7 - $h(\mathscr{A})$ è una sottoalgebra di $\mathscr{A}_1$

$h^{-1}(\mathscr{I})$ è un ideale di $\mathscr{A}$, se $\mathscr{I}$ è un ideale di $\mathscr{A}_1$

$h^{-1}(\mathscr{F})$ è un filtro di $\mathscr{A}$, se $\mathscr{F}$ è un filtro di $\mathscr{A}_1$.

(*) Qui chiameremo misura le funzioni finitamente additive, mentre chiameremo σ-misure quelle numerabilmente additive, in analogia con le parole algebre e σ-algebre.

Mentre se $\mathcal{I}$ è un ideale di $\mathcal{A}$ non è detto che lo sia $h(\mathcal{I})$ (questo perché se $A' \in h(\mathcal{I})$ e $B' \subset A'$ non è detto che sia $B' \in h(\mathcal{I})$).

DEFINIZIONE 12 - h isomorfismo $\Longleftrightarrow$ h omomorfismo ed h ingettiva.

Nel caso in cui h è un isomorfismo surgettivo allora $\mathcal{A}$ ed $\mathcal{A}_1$ si dicono isomorfe.

In tal caso h^{-1} è un isomorfismo di $\mathcal{A}_1$ su $\mathcal{A}$.

PROP. 8 - $h : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_1$: h isomorfismo) $\Longleftrightarrow$ (h omomorfismo e $h^{-1}(0) = 0$)

(o equivalentemente $h(A) = 0 \Longrightarrow A = 0$)

ESEMPIO - Con riferimento all'esempio B) del §1, $\mathcal{A}_1$ ed $\mathcal{A}_2$ sono isomorfe mediante $h(A) = \mathring{A} \quad \forall A \in \mathcal{A}_1$.

§4 - Ideali e filtri massimali (o ultrafiltri).

DEFINIZIONE 13 - Un ideale (filtro) proprio di $\mathcal{A}$ è detto massimale se non è strettamente contenuto in un altro ideale (filtro) proprio di $\mathcal{A}$.

PROP. 9 - $\mathcal{I}$ ideale ($\mathcal{F}$ filtro) massimale $\Longleftrightarrow$ $\forall A \in \mathcal{A}$: A oppure $-A \in \mathcal{I} (\in \mathcal{F})$ dove l'oppure è esclusivo.

DIM.- Intanto non può essere A e $-A \in \mathcal{I}$ altrimenti $A \cup (-A) = 1 \in \mathcal{I}$ ed $\mathcal{I}$ non è un ideale proprio. Se poi per assurdo $\exists\, A \in \mathcal{A} \ni'$ né A né $-A$ appartengono ad $\mathcal{I}$ allora detto $\mathcal{I}_0$ l'ideale generato da $\{\mathcal{I}, A\}$ risulta $\mathcal{I}_0$ proprio $\supset \mathcal{I}$.

cvd

TEOREMA DI STONE (1936).

(i) $\forall \mathcal{I}$ ideale proprio, $\exists$ un ideale massimale $\supset \mathcal{I}$

(ii) $\forall \mathcal{F}$ filtro proprio, $\exists$ un ultrafiltro $\supset \mathcal{F}$

DIM. - Si considera l'insieme $\Phi_{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}' : \mathcal{F}' \text{ filtro ed } \mathcal{F} \subset \mathcal{F}'\}$ e si prova che e'induttivo rispetto alla relazione d'ordine $\subset$ (cioé si prova che ogni parte totalmente ordinata ammette sup. : se Φ è tot. ordinata e $\Phi \subset \Phi_{\mathcal{F}}$, il sup$\Phi$ è il filtro generato dall' $\bigcup_{\mathcal{F}' \in \Phi} \mathcal{F}'$). Per il Teorema di Zorn $\Phi_{\mathcal{F}}$ ammette un elemento massimale che è l'ultrafiltro cercato.

cvd

Non si conoscono dimostrazioni effettive (cioé non basate sull'assioma della scelta) di questo teorema.

<u>Osservazione</u> 1. - Vi è una bigezione tra gli ideali massimali, gli ultrafiltri, gli omomorfismi a 2 valori e le misure a due valori. Infatti se $\mathcal{F}$ è un ultrafiltro, il suo duale è un ideale massimale, $h(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } A \in \mathcal{F} (1, 0 \in A) \\ 0 & \text{se } A \notin \mathcal{F} \end{cases}$ è un omomorfismo a 2 valori e $m(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } A \in \mathcal{F} \\ 0 & \text{se } A \notin \mathcal{F} \end{cases}$ è una misura a 2 valori e viceversa.

§5 - Legame con gli anelli algebrici.

$\emptyset \neq A$ con $(+,.)$ è detto <u>anello</u> (in senso algebrico) se e solo se

(R1) $A + B = B + A$ (commutatività di +)
(R2) $A + (B+C) = (A+B) + C$ (associatività di +)
(R3) Dato A e C $\exists !$ B $\ni'$ $A+B = C$ (esistenza dello zero e dell'opposto)
(R4) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ (associatività di .)
(R5) $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$ } distributività
(R6) $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ }

Dai primi 3 segue che $\exists\, 0$ (zero) $\in \mathcal{A}$ $\ni'$ $A+0 = A$.

Un elemento $1 \in \mathcal{A}$ è detto <u>l'unità</u> di $\mathcal{A}$ $\overset{\text{def}}{\iff}$ $A \cdot 1 = A = 1 \cdot A \quad \forall A \in \mathcal{A}$.

L'anello è <u>commutativo</u> $\iff$ $A \cdot B = B \cdot A$.

L'anello è un <u>anello Booleano</u> se contiene l'unità e $A \cdot A = A \quad \forall A$.

Esempio di anello Booleano è l'anello degli interi modulo 2 cioé $\{0,1\}$ con :

+	0	1
0	0	1
1	1	0

.	0	1
0	0	0
1	0	1

In un anello Booleano si ha (1) $A+A = 0$ (2) $A+B=0 \Longrightarrow B=A$, (3)$A\,B=BA$.

DIM.- (1) $(1+A)(1+A) = (1+A) \Longrightarrow (1+A)+(A+A)=1+A \Longrightarrow$ per la R3) $A+A=0$

(2) Segue che (1) e da R3) per l'unicità dell'elemento B.

(3) $(A+B)(A+B) = A+B \Longrightarrow A^2 + BA + AB + B^2 = A+B \Longrightarrow BA+AB = 0$ e
e dalla(2) segue $AB = BA$.

cvd

PROP. 10 - Ogni algebra Booleana è un anello Booleano con le seguenti definizioni di addizione e di moltiplicazione:

$$A + B = A \triangle B$$
$$A \cdot B = A \cap B$$

Viceversa ogni anello Booleano è un'algebra Booleana con le seguenti operazioni:

$$A \cup B = A + B + A\,B$$
$$A \cap B = A \cdot B$$
$$-A = 1 + A$$

In entrambi i casi gli zeri (e le unità) coincidono.
(Per la dim. cfr. [1] pag. 53).

§6 - Campi d'insiemi ridotti e perfetti.

DEFINIZIONE 14 - Se $\mathcal{A}$ è un campo di sottoinsiemi di X, diremo che $\mathcal{A}$ è ridotto se $\mathcal{A}$ separa i punti di X, cioé

$$\forall\, x \neq y \text{ (in X)} \exists A \in \mathcal{A} \ni' \; x \in A \text{ e } y \notin A$$

ESEMPI

1) $\mathscr{P}(X)$ è ridotto (se $x \neq y$ $\exists$ $\{x\}$ che separa x ed y), mentre $\{\emptyset, X\}$ non è ridotto se card $X > 1$.

2) Sia X uno spazio topologico e sia $\mathscr{A} = \{A \subseteq X;\ A \text{ clopen}\}$.

Ricordiamo che se denotiamo con $C(x)$ la componente connessa di x, allora X si dice totalmente sconnesso o totalmente discontinuo (nella terminologia di [2] pag. 127) se $C(x) = \{x\}$ $\forall x \in X$. Poiché risulta

$$C(x) \subset \tilde{C}(x) = \sqcap\{A \in \mathscr{A} : x \in A\}^{(*)}$$

(cfr. [2] pag. 127), allora $\mathscr{A}$ è ridotto $\Longleftrightarrow \tilde{C}(x) = \{x\}$ $\forall x \in X$. Nel seguito diremo che X è tot. sconnesso se $\mathscr{A}$ è ridotto.

Se X è T_1 ed x è un punto isolato allora $\{x\} \in \mathscr{A}$ e quindi $\tilde{C}(x) = \{x\}$ ma se $\tilde{C}(x) = \{x\}$ non vuol affatto dire che sia x isolato. Quindi X tot. sconnesso non vuol dire che i punti di X siano isolati ($\mathbb{Q}$ è tot. sconnesso ma non ha punti isolati; l'insieme di Cantor è un altro esempio).

Se X è uno spazio topologico e poniamo $xRy \Longleftrightarrow y \in C(x)$ allora R è una relazione di equivalenza e lo spazio $\frac{X}{R}$ è totalmente sconnesso (cfr. [2] pag. 128).

PROP. 11 - Ogni campo $\mathscr{A}$ di sottoinsiemi di X è isomorfo ad un campo ridotto
'.

DIM. - L'idea è di mettere in una stessa classe di equivalenza tutti i punti di X non separati da $\mathscr{A}$. Precisamente definiamo:

$$x\ R\ y \Longleftrightarrow \forall A \in \mathscr{A} : x \in A \Longrightarrow y \in A.$$

Si vede facilmente che R è una relazione di equivalenza (in particolare $x\ R\ y \Longrightarrow y\ R\ x$ in quanto se $A \in \mathscr{A}$ e $y \in A$ e per assurdo $x \notin A$ allora $-A \in$, $x \in -A$ e quindi $y \in -A$).

(*) La $\tilde{C}(x)$ viene a volte detta pseudo-componente connessa di x. $C(x)$ è sempre chiuso. Se lo spazio è loc. connesso allora $C(x)$ è anche aperto e quindi $C(x) \in$ e $C(x) = \tilde{C}(x)$. Ogni spazio tot. connesso è T_2.

Denotiamo con $X' = \frac{X}{R}$, $x' = [x]$

e $A' = \{x' ; x \in A\}$. Allora

$$h(A) = A'$$

definisce un isomorfismo di $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}' = \{A' ; A \in \mathcal{A}\}$ ed $\mathcal{A}'$ è un campo ridotto. Infatti se $x' \neq y' \Longleftrightarrow x \not{R}\, y \Longleftrightarrow \exists\, A \in \mathcal{A} \ni' x \in A$ e $y \notin A \Longleftrightarrow \exists A' \in \mathcal{A}'$ $\ni'$ $x' \in A'$ e $y' \notin A'$. cvd

DEFINIZIONE 15 - Un campo $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di X si dice <u>perfetto</u> se ogni ultrafiltro di $\mathcal{A}$ è <u>determinato da un punto di X</u>, cioé è del tipo $\beta_x = \{A \in \mathcal{A} : x \in A\}$ con $x \in X$ (*).

Esempi

3) Ogni campo $\mathcal{A}$ composto da un numero finito d'insiemi è perfetto. Infatti se β è un ultrafiltro di $\mathcal{A}$, detto $A_0 = \bigcap\{A : A \in \beta\}$, essendo tale intersezione finita, risulta $A_0 \in \beta$ e quindi necessariamente $\beta = \{A \in \mathcal{A} : A_0 \subset A\} = \beta_x$ $\forall x \in A_0$.

4) Sia X infinito e sia $\mathcal{A} = \{A \subset X ;$ A finito o cofinito (cioé $-A$ è finito)$\}$ allora $\beta = \{A \in \mathcal{A} :$ A cofinito$\}$ è un ultrafiltro di $\mathcal{A}$ non determinato da alcun punto di X, pertanto $\mathcal{A}$ non è perfetto.

5) Sia X infinito e sia $\mathcal{A}_1$ un campo di sottoinsiemi di X contenente tutti i singoletti $\{x\}$ di X. Risulta $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_1$ (con riferimento a 4)) e $\mathfrak{F} = \{A \in \mathcal{A}_1 :$: A cofinito$\}$ è un filtro. Se β è un ultrafiltro contenente $\mathfrak{F}$, β non è principale e quindi $\mathcal{A}_1$ non è perfetto.

6) Sia X uno spazio topologico <u>compatto</u> ed $\mathcal{A} = \{A \subseteq X :$ A clopen$\}$, allora $\mathcal{A}$ è un campo <u>perfetto</u>. Infatti se β è un ultrafiltro di $\mathcal{A}$, β ha la proprietà dell'intersezione finita, in quanto $A_i \in \beta$ $i \in \{1,2,\dots,n\} \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \beta$ e

---

(*) Tali <u>ultrafiltri</u> β_x sono detti anche <u>fissi</u> o <u>principali</u> o <u>primi</u> (Defin. analoga vale per gli ideali massimali principali).

quindi $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$. Inoltre β è costituito da chiusi, quindi per una nota caratterizzazione dei comp ti (cfr. [3] pag. 584) risulta $A_0 = \bigcap_{A \in \beta} A \neq \emptyset$.

Risulta allora

$$\beta = \{ A \in \mathcal{A} : A \supset A_0 \} = \beta_x \qquad \forall x \in A_0 .$$

PROP. 12 - Se $\mathcal{A}$ è un campo di sottoinsiemi di X, ridotto e perfetto allora, detto $[\mathcal{A}]$ l'insieme degli ultrafiltri di $\mathcal{A}$, l'applicazione $X \ni x \to \beta_x \in [\mathcal{A}]$ è una bigezione, cioé ogni ultrafiltro di $\mathcal{A}$ è determinato da un unico punto di X. Quindi $\operatorname{card} X = \operatorname{card} [\mathcal{A}]$

DIM.

L'applicazione è surgettiva perché $\mathcal{A}$ è perfetto. L'applicazione è ingettiva perché se $x \neq y$ allora $\exists A \in \mathcal{A} \ni' x \in A$ e $y \notin A$, quindi $A \in \beta_x - \beta_y$ e $\beta_x \neq \beta_y$.

cvd

Osservazione 2. Se X è uno spazio topologico compatto e totalmente sconnesso allora $\mathcal{A} = \{ A \subset X;\ A \text{ clopen} \}$ è ridotto e perfetto. Orbene il viceversa è anche vero, nel senso specificato dal seguente:

TEOREMA 13 - Se $\mathcal{A}$ è un campo ridotto e perfetto di sottoinsiemi di X, allora su X si può definire una topologia $\mathcal{T}$ che lo rende compatto e totalmente sconnesso ed $\mathcal{A}$ diventa l'insieme dei clopen per quella topologia.

DIM.

Basta considerare $\mathcal{A}$ come base della topologia $\mathcal{T}$. Risulta

$$\mathcal{T} = \{ \bigcup_{A \in \mathcal{B}} A;\ \text{con } \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \} \quad \text{(cfr. [3] pag. 549).}$$

Evidentemente $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$, quindi ogni elemento A di $\mathcal{A}$ è aperto, ma è anche chiuso essendo $-A \in \mathcal{A}$ aperto. Se denotiamo con $\mathcal{A}_1$ l'insieme dei clopen di $\mathcal{T}$ risulta pertanto

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_1 ,$$

ed essendo $\mathcal{A}$ ridotto, lo spazio topologico $(X,\mathcal{T})$ è totalmente sconnesso. Proviamo che $(X,\mathcal{T})$ è compatto. Basterà provare che se $\{A_i : i \in I\} \subset \mathcal{A}$ è un ricoprimento di X, esiste J finito $\subset$ I ∋' $X = \bigcup_{i\in J} A_i$. Supposto per assurdo che $\forall$ J finito $\subset I$: $\bigcup_{i\in J} A_i \neq X$, allora $\bigcap_{i\in J} A'_i \neq \emptyset$, $(A'_i = -A_i)$ quindi $\mathcal{B} = \{A'_i : i \in I\} \subset \mathcal{A}$ ha la proprietà dell'intersezione finita e genera un filtro proprio $\mathfrak{F}$ (cfr. Prop. 4' pag. 4). Sia β un ultrafiltro contenente $\mathfrak{F}$ (e quindi $\mathcal{B}$). Poiché $\mathcal{A}$ è perfetto $\exists\, x_0 \in X$ ∋' $\beta = \beta_x$ e quindi $x_0 \in \bigcap_{i\in I} A'_i$ cioé $\bigcup_{i\in I} A_i \neq X$ contro l'ipotesi. Proviamo ora che

$$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A} .$$

Sia $A \in \mathcal{A}_1$. Essendo A aperto, è esprimibile come unione di elementi di $\mathcal{A}$, cioé

$$A = \bigcup_{i\in I} A_i \qquad \text{con } A_i \in \mathcal{A}$$

Essendo A chiuso ed X compatto, A è compatto e quindi esiste J finito $\subset$ I ∋' $A = \bigcup_{i\in J} A_i$. Pertanto come unione finita di elementi di $\mathcal{A}$ risulta $A \in \mathcal{A}$

cvd

Osservazione 3 - La topologia $\mathcal{T}$ del teorema precedente è univocamente determinata da $\mathcal{A}$ e dalle condizioni del teorema. Infatti se $\mathcal{T}_1$ è un'altra topologia che rende X compatto, totalmente sconnesso e con $\mathcal{A}$ coincidente con l'insieme dei clopen, essendo $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}_1$ segue che $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_1$.

Considerata allora l'applicazione identica

$$i : (X,\mathcal{T}_1) \rightarrow (X,\mathcal{T})$$

questa è continua, ed essendo $(X,\mathcal{T}_1)$ compatto, i è un omeomorfismo (cfr. [3] pag. 589 ,[6] pag. 141) e quindi $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}$.

PROP. 14 - Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due campi perfetti e ridotti di sottoinsiemi di X e di Y rispettivamente.

Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono isomorfi, allora gli spazi X ed Y topologizzati come indicato nel teorema 13 sono omeomorfi.

DIM.

Sia $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un isomorfismo di $\mathcal{A}$ su $\mathcal{B}$

Se $x \in X$, $h(\beta_x)$ è un ultrafiltro di $\mathcal{B}$ (cfr. prop.7), come tale è determinato da un unico punto $\varphi(x) \in Y$ (cfr. prop. 12), cioé:

$$h(\beta_x) = \beta_{\varphi(x)} .$$

Si è così definita l'applicazione $\varphi : X \to Y$ e risulta $\forall A \in \mathcal{A}$

$$x \in A \iff \varphi(x) \in h(A) \quad (y \in B \iff \varphi^{-1}(y) \in h^{-1}(B))$$

Tale applicazione φ è bigettiva ed ha le seguenti proprietà:

$$\forall A \in \mathcal{A} : \varphi(A) = h(A)$$

$$\forall B \in \mathcal{B} : \varphi^{-1}(B) = h^{-1}(B)$$

Di conseguenza se G è un aperto di X allora $G = \bigcup_{i \in I} A_i$ con $A_i \in \mathcal{A}$ e $\varphi(G) = \varphi(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} \varphi(A_i) = \bigcup_{i \in I} h(A_i)$; quindi $\varphi(G)$ risulta unione di elementi di $\mathcal{B}$ e perciò è aperto in Y.

Analogamente se G_1 è aperto in Y, si prova che $\varphi^{-1}(G_1)$ è aperto in X.

cvd

Osservazione 4. Se $\mathcal{A}$ è un campo perfetto (ma non necessariamente ridotto) allora, definendo $\mathcal{E}$ come nel teorema 13 si ottiene uno spazio topologico compatto ed $\mathcal{A}$ coincide con la famiglia dei clopen. Però (X,τ) non solo non è totalmente sconnesso, ma in generale non sarà neanche T_0.

PROP. 15 - Se $\mathcal{A}$ è un campo perfetto di sottoinsiemi di X e $\{A_i ; i \in I\}$ è un sottoinsieme infinito di elementi di $\mathcal{A}$, non vuoti e mutualmente disgiunti, allora $A = \bigcup_{i \in I} A_i \notin \mathcal{A}$.

DIM. Se $\mathcal{T}$ è la topologia definita nel teor. 13, per quanto visto nell'osserv. 4, $(X,\mathcal{T})$ è compatto. Se per assurdo $A \in \mathcal{A}$ allora A è chiuso e quindi $\exists$ J finito $\subset I \ni' A = \bigcup_{i \in J} A_i$. Questo è in contrasto con l'ipotesi che I è infinito e le A_i sono non vuote e mutualmente disgiunte.

cvd

§ 7 - <u>Il teorema di rappresentazione di Stone</u> (1934~1938)

Nel §1 abbiamo visto che i campi di sottoinsiemi di un dato insieme X, sono particolari algebre Booleane. In questo paragrafo faremo vedere che data un'algebra Booleana $\mathcal{A}$, questa può sempre essere riguardata, a meno di isomorfismi come un campo di sottoinsiemi, ridotto e perfetto, dello spazio $X = [A]$ degli ultrafiltri di $\mathcal{A}$.

<u>Teorema</u> 16 - Sia $\mathcal{A}$ un'algebra Booleana, $X = [\mathcal{A}]$. Posto $h : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(X)$ $\ni$ $h(A) = \{\beta \in X : A \in \beta\} = A^*$ $\forall A \in \mathcal{A}$, allora h è un isomorfismo di $\mathcal{A}$ su $\mathcal{A}^* = h(\mathcal{A})$, che è un campo ridotto e perfetto di sottoinsiemi di X.

DIM.

Si tratta di provare che $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$, $(A \cap B)^* = A^* \cap B^*$, $(A')^* = (A^*)'$
A tal fine basta osservare che, per definizione:

$$A \in \beta \iff \beta \in A^*$$

Infine $\beta \in (A \cap B)^* \iff A \cap B \in \beta \iff A \in \beta \wedge B \in \beta \iff \beta \in A^* \wedge \beta \in B^* \iff \beta \in A^* \cap B^*$

$$\beta \in (A')^* \iff A' \in \beta \iff A \notin \beta \iff \beta \notin A^* \iff \beta \in (A^*)'.$$

Per provare che h è <u>ingettiva</u> basta provare che $h(A) = \emptyset \Rightarrow A = 0$ o equivalentemente $0 \neq A \in \mathcal{A} \Longrightarrow h(A) \neq \emptyset$.

Se $0 \neq A \in \mathcal{A}$, posto $\varphi = \{ B \in \mathcal{A} : B \supset A \}$, risulta φ un filtro di $\mathcal{A}$. Se β è un ultrafiltro contenente φ risulta $\beta \in h(A)$ e quindi $h(A) \neq \emptyset$. Quindi h è un isomorfismo di $\mathcal{A}$ su $\mathcal{A}^*$.

Proviamo che $\mathcal{A}^*$ è *ridotto*. Siano $\beta_1, \beta_2 \in X$ e $\beta_1 \neq \beta_2$; questo significa che $\exists A \in \mathcal{A}$ $\ni'$ $A \in \beta_1 - \beta_2$. Conseguentemente $\beta_1 \in A^*$ e $\beta_2 \notin A^*$.

Proviamo che A^* è *perfetto*. Se β_1 è un ultrafiltro di A^* allora $\beta = h^{-1}(\beta_1)$ è un ultrafiltro di $\mathcal{A}$.

$$B \in \beta_1 \Longrightarrow B \in \mathcal{A}^* \Longrightarrow \exists A \in \mathcal{A} \ \ni' \ h(A) = B \Longrightarrow A \in \beta$$

Viceversa $A \in \beta \Rightarrow B = h(A) \in \beta_1$. Pertanto

$$B \in \beta_1 \Longleftrightarrow A \in \beta \Longleftrightarrow \beta \in A^* = h(A) = B$$

cioé $\beta_1 = \{ B \in \mathcal{A}^* : \beta \in B \}$,

vale a dire : β_1 è determinato dal punto $\beta \in X$.

cvd

Osservazione 5. Per quanto visto con teorema 13, $\mathcal{A}^*$ induce su $[\mathcal{A}]$ una topologia che lo rende compatto e totalmente sconnesso ed $\mathcal{A}^*$ coincide con l'insieme di clopen di $[\mathcal{A}]$.

DEFINIZIONE 16 - Data un'algebra Booleana $\mathcal{A}$, chiamiammo *spazio di Stone* di $\mathcal{A}$, ogni spazio topologico compatto e totalmente sconnesso X, il cui campo dei clopen è isomorfo ad $\mathcal{A}$.

Osservazione 6 - Dall'osservazione 3 segue che tutti gli spazi di Stone di $\mathcal{A}$ coincidono a meno di omeomorfismi.

Viceversa se X è uno spazio di Stone di $\mathcal{A}$ ed Y è omeomorfo ad X allora anche Y è uno spazio di Stone di $\mathcal{A}$. Infatti sia $\varphi : X \to Y$ un omeomorfismo di X su Y e sia $\mathcal{C}$ il campo di clopen di X, posto

$$h(A) = \varphi(A) \qquad \forall A \in \mathcal{C}$$

risultando $\varphi(A)$ un clopen di Y, è h un isomorfismo di $\mathcal{C}$ sul campo $\mathcal{C}_1$ dei clopen di Y. Essendo $\mathcal{C}$ isomorfo ad $\mathcal{A}$ anche $\mathcal{C}_1$ è isomorfo ad $\mathcal{A}$.

Esempi

1) Se X è uno spazio topologico compatto e totalmente sconnesso ed $\mathcal{A}$ è il campo dei clopen di X, allora lo spazio di Stone di $\mathcal{A}$ è X stesso.

2) Se $\mathcal{A}$ è un'algebra Booleana finita, necessariamente lo spazio di Stone X di $\mathcal{A}$ deve essere finito ed essendo separato non può che essere $\mathcal{C} = \mathcal{P}(X)$. Pertanto se X ha n elementi, $\mathcal{C}$ ne ha 2^n e quindi $\mathcal{A}$ essendo isomorfo a $\mathcal{C}$ ne ha 2^n. Non possono quindi esistere algebre Booleane finite non degeneri (cioè con più di un punto), che hanno una cardinalità diversa da 2^n per qualche $n \in N$.

Ancora 2 algebre Booleane $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ finite che hanno lo stesso numero di elementi sono isomorfe. Infatti se X è lo spazio di Stone di $\mathcal{A}$ ed Y quello di $\mathcal{B}$, necessariamente X ed Y hanno lo stesso numero di elementi, quindi

$$\exists f : X \to Y \qquad \text{bigettiva}$$

f induce un'applicazione di $\mathcal{P}(X)$ in $\mathcal{P}(Y)$ che è isomorfismo. Essendo $\mathcal{A}$ isomorfo a $\mathcal{P}(X)$ e $\mathcal{B}$ isomorfo a $\mathcal{P}(Y)$ segue che $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono isomorfi.

3) Lo spazio di Stone X di un'algebra Booleana $\mathcal{A}$ è metrizzabile se e solo se $\mathcal{A}$ è al più numerabile.

Dal teorema di Uryson (cfr. [3] pag. 616) segue che uno spazio compatto e T_2 è metrizzabile se e solo se ha una base di aperti numerabili, pertanto l'asserto segue dal fatto che $\mathcal{A}^*$ è una base di X.

4) Sia X_0 un insieme infinito che considereremo topologizzato con la topologia discreta. Sia $\mathcal{A} = \{ A \subset X_0 ; A \text{ finito o cofinito} \}$. Si vede facilmente che $\mathcal{A}$ è un campo ridotto ma non perfetto, in quanto l'ultrafiltro di $\mathcal{A}$ $\beta = \{ A \in \mathcal{A} : A \text{ cofinito} \}$ non è determinato da alcun punto di X_0. Considerato un punto $x_0 \notin X_0$ sia $X = X_0 \cup \{x_0\}$ e poniamo

$$h(A) = \begin{cases} A & \text{se } A \in \mathcal{A} \text{ è finito} \\ A \cup \{x_0\} & \text{se } A \in \mathcal{A} \text{ è cofinito} \end{cases}$$

Se $h(\mathcal{A}) = \mathcal{C}$, h è isomorfo di $\mathcal{A}$ sul campo $\mathcal{C}$ di sottoinsiemi di X. $\mathcal{C}$ è ridotto e perfetto (questa volta il corrisponndente di β è determinato da x_0). Considerando $\mathcal{C}$ come base di aperti di X, X diventa uno spazio topologico compatto e totalmente sconnesso e quindi è lo spazio di Stone di $\mathcal{A}$.

X è detto <u>compatificazione con un punto</u> dello spazio discreto X_0 (cfr. [3] pag. 599).

5) Ricordiamo che uno spazio topologico X si dice a) <u>completamennte regolare</u> (c.r.) se è T_1 e $[\forall$ chiuso C e $\forall\, x \notin C\ \exists\, f : X \to [0,1]$ continua (e limitata) tale che $f(x) = 0$ e $f(c) = 1]$

b) <u>regolare</u> se è T_1 e T_3

c) <u>normale</u> se è T_1 e T_4 (T_2 e compatto $\Rightarrow$ normale ([3] pag.587))

Poiché c) $\Rightarrow$ a) $\Rightarrow$ b) (cfr. per es. [4] pag. 129) a volte la proprietà tra parentesi quadre e indicata con $T_{3,5}$.

Orbene vale il seguente

<u>TEOREMA</u> 17 (1937) <u>di Stone e E.Čech</u> (cfr. [4],[5] oppure [6] pag. 152).

Se X è C.R. allora $\exists$ ed è ! a meno di omeomorfismi uno spazio topologico $\beta(X)$ T_2 e compatto tale che:

(i) X è denso in $\beta(X)$ (nella topologia di $\beta(X)$)

(ii) ogni $f : X \to \mathbb{R}$ cont. e limitata ha un prolungamento (cont. e limitato) su $\beta(X)$.

Tale spazio $\beta(X)$ prende il nome di <u>compattificazione di Stone-Čech</u> dello spazio X.

Il legame di questo concetto con lo spazio di Stone è il seguente:

se X è un insieme qualsiasi, può sempre essere considerato spazio topologico con la topologia discreta $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$; in tal caso è evidentemente C.R.

Considerato $\beta(X)$ questo altro non è che lo spazio di Stone di $\mathcal{A}$ (cfr. Osservazione 6).

Si ha anche il seguente risultato:

TEOREMA 18 di B.*Pospišil* (1937) (cfr. [5] pag. 70). Se X è discreto e $|X| = \text{card } X \geq \aleph_0$ allora $|\beta(X)| = 2^{2^{|X|}}$ (cfr.[1] pag. 45)

In breve quello che si prova nel teorema 17, è che detto $C(X)$ l'insieme delle funzioni continue di X in $[0,1] = I$ e posto $\varphi : X \rightarrow I^{C(X)}$ $\ni'$ $\forall x \in X$ $\varphi(x) \in I^{C(X)}$ tale che la f-ma coordinata di $\varphi(x)$ è proprio $f(x)$ $\forall f \in C(X)$.

φ è *continua* in quanto ogni sua coordinata è continua, inoltre essendo X C.R., φ *è ingettiva*. $I^{C(X)}$ come prodotto di spazi compatti e T_2 è compatto e T_2. Posto $\beta(X) = \overline{\varphi(X)}$ segue l'asserto.

6) Sia $\mathcal{A}$ un campo di sottoinsiemi di X. Poniamo $\forall A \in \mathcal{A}$

$$g(A) = \{\beta \in [\mathcal{A}] : A \in \beta \text{ e } \beta \text{ non determinato da un punto di } X\}.$$

L'applicazione

$$h(A) = A \cup g(A) \qquad \forall A \in \mathcal{A}$$

è un isomorfismo di $\mathcal{A}$ su un campo perfetto $\mathcal{A}_1$ di sottoinsiemi dello spazio $Y = X \cup g(X)$. Pertanto si può passare da un campo $\mathcal{A}$ ad un campo perfetto $\mathcal{A}_1$, *aggiungendo dei punti all'insieme* X.

INTERPRETAZIONE DEI CONCETTI ALGEBRICI NELLO SPAZIO DI STONE ASSOCIATO E VICEVERSA

Sia X lo spazio di Stone dell'algebra $\mathcal{A}$ e sia $h : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ il relativo isomorfismo.

Se G è un *aperto* di X allora $\{A \in \mathcal{A} : h(A) \subset G\}$ è un *ideale* detto *corrispondente* a G. Viceversa se $\mathfrak{I}$ è un ideale di $\mathcal{A}$ allora

$$h(\mathfrak{I}) = \bigcup \{ h(A) : A \in \mathfrak{I} \} \text{ è un aperto di } X.$$

Se F è un chiuso di X allora $\{A \in \mathcal{A} : F \subset h(A)\}$ è un filtro detto corrispondente ad F. Viceversa se $\mathfrak{F}$ è un filtro di $\mathcal{A}$ allora $h(\mathfrak{F}) = \bigcap\{h(A) : A \in \mathfrak{F}\}$ è un chiuso di X. In breve

$\mathcal{A}$		X	$\mathcal{A}$		X	
ideali	$\longleftrightarrow$	aperti	$\{1\}$	$\longleftrightarrow$	X	
filtri	$\longleftrightarrow$	chiusi	ultrafiltri	$\longleftrightarrow$	$\{x\}$	dove $x \in X$
$\{0\}$	$\longleftrightarrow$	$\emptyset$	ideali massimali	$\longleftrightarrow$	$X-\{x\}$	"

Osserviamo ancora che se $A \in \mathcal{A}$ e consideriamo $h(A) = A^* \in \mathcal{A}^*$ poiché per quanto visto con il T(16) e T(13), $\mathcal{A}^*$ è base della topologia su $X = [\mathcal{A}]$ e coincide con i clopen, risulta se $\beta \in X$

$$A \in \beta \iff \beta \in A^* \iff A^* \text{ è un intorno aperto e chiuso di } \beta .$$

Da ciò segue che: se $Y \subset X$

β_0 è isolato in $Y \iff \exists A \in \mathcal{A} \ni' A \in \beta_0 - \beta \ \forall \beta \in Y - \{\beta_0\}$

$\iff \exists A \in \mathcal{A} \ni' A^* = \{\beta_0\}$ ($\iff A$ è atomo di $\mathcal{A}$ cfr. §11 pag 31)

$Y = \{\beta_i ;\ i \in I\}$ è un insieme discreto in $X \iff$ Ogni punto di Y è isolato in Y

$\iff \forall i \in I \ \exists A \in \mathcal{A} \ni A \in \beta_i - \beta_j \ \forall j \in I - \{i\}$

$Y = \{\beta_i ; i \in I\}$ è denso in sé $\iff Y \subset D_r Y \iff \forall i \in I \ \forall A \in \beta_i \ \exists j \in I - \{i\}$ tale che $A \in \beta_j \iff \forall i \in I : \beta_i \subset \bigcup_{j \neq i} \beta_j$

Osservazione 7. Sia $\mathcal{A}$ un campo di sottoinsiemi di X ed $h : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$ con $h(A) = \{\beta \in [\mathcal{A}] : A \in \beta\} = A^*$. Consideriamo la topologia indotta da $\mathcal{A}^*$ su $[\mathcal{A}]$ e proviamo che

$X' = \{\beta_x \in [\mathcal{A}] : x \in X\}$ è denso in $[\mathcal{A}]$, cioé $\overline{X'} = [\mathcal{A}]$.

Traducendo :$[\mathcal{A}] \subset \bar{X}'$ si ha

$$\forall\, \beta \in [\mathcal{A}] \text{ e } \forall A \in \mathcal{A} \ni' \beta \in A^* \; \exists\, x \in X \ni' \beta_x \in A^*$$

ovvero

$$\forall\, \beta \in [\mathcal{A}] \text{ e } \forall A \in \beta \; \exists\, x \in X \ni' A \in \beta_x .$$

La proposizione precedente è banalmente vera in quanto $\forall A \in \beta$ basta considerare un $x \in A$, per avere che $A \in \beta_x$.

Questo risultato va confrontato con il Teorema (17) e la (6).

§8 - U e ∩ infinite in un'algebra Booleana $\mathcal{A}$.

Al §1 abbiamo osservato che rispetto alla relazione d'ordine $\subset$ si ha

$$A \cup B = \sup\{A,B\} \qquad A \cap B = \inf\{A,B\} .$$

Tale fatto ci suggerisce come definire l'U e l'∩ , che chiameremo BOOLEANA, per un numero infinito di elementi di A.

Se $\emptyset = \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, denotiamo l'unione di tutti gli elementi di $\mathcal{B}$ con

$$\bigcup_{A\in\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} A$$

e tale unione, se esiste, è per definizione

$$(1) \qquad \bigcup_{A\in\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} A = \sup\{A; A \in \mathcal{B}\} = B \iff \begin{array}{l} 1)\ B \in \mathcal{A} \\ 2)\ A \subset B \quad \forall A \in \mathcal{B} \\ 3)\ A \subset C \ (C \in \mathcal{A}) \quad \forall A \in \mathcal{B} \Rightarrow B \subset C \end{array}$$

(dove il sup. s'intende in $\mathcal{A}$).

Analogamente per l'intersezione

$$(2) \qquad \bigcap_{A\in\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} A = \inf\{A; A \in \mathcal{B}\}$$

Il simbolo $\mathcal{A}$ in alto può essere trascurato quando non vi siano dubbi sull'insieme ambiente. Se $\mathcal{B} = \{A_i ;\ i \in I\}$ si scriverà in luogo di (1) e (2)

$\bigcup\limits_{i\in I}^{\mathcal{A}} A_i$ e $\bigcap\limits_{i\in I}^{\mathcal{A}} A_i$

Si osservi per inciso che se $\mathcal{A}'$ è una sottoalgebra di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}'$ allora, nell'ipotesi di esistenza per l'$\cup$ e l'$\cap$ valgono:

$$(3) \quad \bigcap_{A\in\mathcal{B}}^{\mathcal{A}'} A \subset \bigcap_{A\in\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} A \subset \bigcup_{A\in\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} A \subset \bigcup_{A\in\mathcal{B}}^{\mathcal{A}'} A$$

Osserviamo ancora che se $\exists \bigcup\limits_{A\in\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} A \in \mathcal{A}'$ allora nella 3^a delle (3) vale l'uguaglianza (analogamente per l'$\cap$).

Se h è un isomorfismo di $\mathcal{A}$ *su* $\mathcal{A}'$ allora

$$(4) \quad h\Big(\bigcup_{A\in\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} A\Big) = \bigcup_{A\in\mathcal{B}}^{\mathcal{A}'} h(A) \qquad \text{(anal. per l'}\cap\text{)}$$

nel senso che se $\exists$ l'unione in uno dei due membri esiste anche nell'altro.

Il motivo della (4) è che l'isomorfismo h ed h^{-1} preserva l'$\subset$.
La (4) però *non vale* se h non è *bigettiva*.

L'$\bigcup$ e l'$\bigcap$ Booleane (infinite), definite da (1) e (2), possono non coincidere con l'$\cup$ e l'$\cap$ della teoria degli insiemi, nel caso in cui l'algebra Booleana è un campo. Però se l'$\cup$ (o l'$\cap$) insiemistica appartiene al campo, allora è anche l'$\cup$ (o l'$\cap$) Booleana.

ESEMPI

A) Sia $\mathbb{N}_0 = \{0,1,\dots,\}$ ed $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$ e sia

$\mathcal{B} = \{ A \,;\, (A \text{ finito} \subset \mathbb{N}) \vee ((\mathbb{N}_0 - A) \text{ finito} \subset \mathbb{N})\}$. $\mathcal{B}$ è una sottoalgebra di $\mathcal{A}$. Risulta $\mathbb{N} \notin \mathcal{B}$ e

$$\overset{\infty}{\underset{n=1}{\mathop{\cup}}}{}^{\mathcal{A}} \{n\} = \mathbb{N} \quad , \quad \overset{\infty}{\underset{n=1}{\mathop{\cup}}}{}^{\mathcal{B}} \{n\} = \mathbb{N}_0$$

(se $A \in \mathcal{B}$ ed A è infinito, necessariamente $o \in A$ per come è definito $\mathcal{B}$).

B) Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ è un campo di sottoinsiemi $\ni'$ $\{\{x\};\, x \in X\} \subset \mathcal{A}$, allora l'U (e $\cap$) Booleana (infinita) coincide sempre con qualla insiemistica. Precisamente la 1^a esiste se e solo se la 2^a appartiene ad $\mathcal{A}$. Infatti se $\exists \underset{i \in I}{\cup}{}^{\mathcal{A}} A_i = A$ allora $A_i \subset A \;\; \forall i \in I$ quindi $\underset{i \in I}{\cup} A_i \subset A$. Se per assurdo non coincidessero, esisterebbe $x_0 \in A$ $\ni'$ $\underset{i \in I}{\cup} A_i \subset A - \{x_0\}$. Quindi $A_i \subset A - \{x_0\} \;\; \forall i \in I$ contraddicendo la 2^a proprietà del sup ($A - \{x_0\} \in \mathcal{A}$ perché $\{x_0\} \in \mathcal{A}$). Viceversa se $\underset{i \in I}{\cup} A_i = A \in \mathcal{A}$ allora A è il sup in $\mathcal{A}$ di $\{A_i;\, i \in I\}$ e quindi coincide con l'unione Booleana.

Si può verificare che l'U e l'$\cap$ Booleane infinite sono

1) Commutative : cioé $\underset{i \in I}{\cup} A_i = \underset{i \in I}{\cup} A_{\tau(i)}$ dove $\tau : I \to I$ bigettiva. Analog. per l'$\cap$

2) Associative

3) Verificano le leggi di De Morzan

4) e vale la legge di distributività

$$A \cap (\underset{i \in I}{\cup} A_i) = \underset{i \in I}{\cup} (A \cap A_i)$$

$$A \cup (\underset{i \in I}{\cap} A_i) = \underset{i \in I}{\cap} (A \cup A_i)$$

Ma mentre per l'unione e l'intersezione insiemistiche vale la seguente legge distributiva

(5) $\bigcap_{t\in T} \bigcup_{s\in S} A_{t,s} = \bigcup_{\phi\in S^T} \bigcap_{t\in T} A_{t,\phi(t)}$ (e la sua duale)

($S^T = \{f : f : T \to S\}$), tale legge non vale per l'$\cup$ e l'$\cap$ Booleana, e questo anche se tutte le unioni e intersezioni esistono e se S è finito(cfr. [1] pag. 61).

Per tale ragione un'algebra Booleana per la quale vale la (5) dove card.T=m e card.S = n si dice (m,n)-distributiva. Inoltre diremo che $\mathcal{A}$ è m-distributiva se è (m,m)-distributiva e completamente distributiva se è m-distributiva $\forall$ cardinale m.

§ 9 - Algebre Booleane m-complete.

Sia $\mathcal{A}$ un'algebra Booleana ed m un cardinale infinito. Se accade che $\forall \{A_i ; i \in I\} \subset \mathcal{A}$ con card I = m, $\exists \overset{A}{\bigcup_{i \in I}} A_i$ (o equivalentemente $\exists \bigcap_{i \in I}^{\mathcal{A}} A_i$), allora diremo che $\mathcal{A}$ è m-completa o è una m-algebra . In particolare se $m = \aleph_0$ allora diremo che $\mathcal{A}$ è una σ-algebra.

Diremo poi che $\mathcal{A}$ è completa se è m-completa $\forall$ m .

Un campo d'insiemi $\mathfrak{F}$ si dice m-completo o m-campo se $\forall \{A_t ; t \in T\} \subset \mathfrak{F}$ con card T = m risulta $\bigcup_{t \in T} A_t \in \mathfrak{F}$ (unione insiemistica) o equivalentemente $\bigcap_{t \in I} A_t \in \mathfrak{F}$.

Se questo accade $\forall$m il campo si dice completo..

Osservazione (9.0). Per la (4) di §8 se $\mathcal{A}$ ed $\mathcal{A}'$ sono isomorfe: $\mathcal{A}$ m-completa (completa) $\Rightarrow$ $\mathcal{A}'$ m-completa (completa).

Osservazione (9.1). Un campo d'insiemi $\mathfrak{F}$ può essere m-completo come algebra Booleana ma non essere un m-campo; mentre il viceversa è vero per quanto detto nella B) del §8.

ESEMPI

A) Sia $\mathcal{A} = \wp(X)$ dove X è infinito. Sia $h : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$ dove $\mathcal{A}^*$ è il solito campo dei clopen dello spazio di Stone $[\mathcal{A}]$. Poiché $\mathcal{A}$ è un'algebra Booleana completa e poiché $\mathcal{A}^*$ è isomorfa ad $\mathcal{A}$, anche $\mathcal{A}^*$ è un'algebra Booleana completa, tuttavia $\mathcal{A}^*$ non è un σ-campo (cfr. Prop. 15 e Teor.16), in quanto se $\{A_n ; n \in \mathbb{N}\}$ sono a 2 a 2 disgiunti e non vuoti, $\bigcup_{n=1}^{\infty} h(A_n) \notin \mathcal{A}^*$.

B) Se $\mathcal{A}$ è una σ-algebra Booleana infinita, allora card $\mathcal{A} \geq 2^{\aleph_0}$. Infatti poiché per ipotesi $\mathcal{A}$ è infinita $\exists \{A_n ; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}$ con le A_n a 2 a 2 disgiunte e non vuote tali che $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = 1$ (unità dell'algebra). Posto

$\mathfrak{I} = \mathcal{P}(N)$ possiamo definire un isomorfismo $h : \mathfrak{I} \to \mathcal{A}$ ponendo $\forall\, B \in \mathfrak{I} : h(B) = \bigcup_{n \in B} A_n$

(Essendo $\mathcal{A}$ σ-algebra, risulta sempre $h(B) \in \mathcal{A}$. La sottoalgebra $h(\mathfrak{I})$ di $\mathcal{A}$ è quindi isomorfo ad $\mathfrak{I}$ e card $\mathcal{A} \geq$ card $\mathfrak{I} = 2^{\aleph_0}$.

Si ha il seguente criterio

Teorema (9.1) (di Smith e Tarski)

Se $\{A_i;\ i \in I\} \subset \mathcal{A}$, card $I = m$, le A_i sono a 2 a 2 disgiunte ed $\exists \overset{\mathcal{A}}{\bigcup_{i \in I}} A_i$

allora $\mathcal{A}$ è m-completa

(cfr. [1] pag. 68). In altre parole basta verificare la condizione per le famiglie disgiunte.

DEFINIZIONE. Diremo che un'algebra Booleana $\mathcal{A}$ verifica la condizione di m-catena seper ogni $\{A_i;\ i \in I\} \subset \mathcal{A}$ a 2 a 2 disgiunti, segue che card $I \leq m$.

Teorema (9.2) (di Tarski)

$\mathcal{A}$ algebra Booleana m-completa con la condizione di m-catena $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ è completa.

DIM.- Per il Teorema (9.1) è sufficiente provare che $\forall \{A_i;\ i \in I\} \subset \mathcal{A}$ a 2 a 2 disgiunte risulta $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$. Ma se le A_i sono a 2 a 2 disgiunte, per la condizione di m-catena non può che essere card $I \leq m$ e quindi essendo $\mathcal{A}$ m-algebra risulta $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$

cvd

DEFINIZIONE. Se $\mathcal{A}$ è un'algebra Booleana ed $m : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$, diremo che m è una n-misura se

1) $\exists\, A_0 \in \mathcal{A} \ni' m(A_0) < +\infty$

2) $\forall \{A_i;\ i \in I\} \subset \mathcal{A}$ disgiunti con card $I \leq n$ e tale che $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$ risulta

$$m(\bigcup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} m(A_i)$$

dove la somma è così intesa: se $m(A_i) = 0 \ \forall\, i \in I - J$ con J al più numerabile e $\sum_{i\in J} m(A_i) = c < +\infty$ allora $\sum_{i\in I} m(A_i) = c$ altrimenti $\sum_{i\in I} m(A_i) = +\infty$

Nella 2) la condizione $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$ diventa superflua nel caso in cui $\mathcal{A}$ è una $\aleph$-algebra.

Diremo che m è una *σ-misura* o che è *σ-additiva* se è una $\aleph_0$-misura.

Prop. (9.3). Se m è una σ-misura ll'algebra $\mathcal{A}$, $\{A_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}$ e $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, allora:

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \quad (\sigma\text{-}\underline{\text{sub-additività}})$$

(la dim. è l'usuale).

NB. La prop. (9.3) si estende al caso di m $\aleph$-misura su una $\aleph$-algebra (cfr. [1] pag. 73)

La def. di *misura σ-finita* è la solita.

Diremo che m è *strettamente positiva* se

$$m(A) > 0 \quad \forall A \in \mathcal{A} - \{0\}$$

Osservazione (9.2). Se $\exists$ m σ-misura strettamente postivia è σ-finita su $\mathcal{A}$, allora esiste anche una σ-misura strettamente positiva e finita m' su $\mathcal{A}$. Infatti se $\{A_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}$ disgiunti $\ni'$ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = 1$ e $0 < m(A_n) < +\infty$ allora posto

$$m'(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(A \cap A_n)}{2^n\, m(A_n)} \qquad \forall A \in \mathcal{A}$$

si ottiene una σ-misura strettamente positiva e finita.

PROPOSIZIONE (9.4). Se $\mathcal{A}$ è una σ-algebra Booleana avente una misura finita (o σ-misura eσfinita) strettamente positiva allora $\mathcal{A}$ è completa.

DIM. Per il Teorema (9.2) basta provare che $\mathcal{A}$ verifica la condizione di - σ-catena.

Sia $\{A_i ;\ i \in I\} \subset \mathcal{A}$ e a 2 a 2 disgiunti e diversi da 0. Posto

$$I_o = \{i \in I : m(A_i) \geq 1\}$$ e per $n \in \mathbb{N}$ sia

$$I_n = \{ i \in I : \frac{1}{n+1} \leq m(A_i) < \frac{1}{n} \}$$

risulta $\{I_0, I_1, \dots\}$ una partizione di I.

Poiché nell'ipotesi in cui siamo se $\{A_1, A_2, \dots\} \subset \mathcal{A}$ sono disgiunti risulta $\sum_{k=1}^{n} m(A_k) = m(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leq m(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)$ e quindi per $n \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) \leq m(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k),$$

segue che le $I_0, I_1, \dots, I_2, \dots$ devono essere necessariamente finite altrimenti se per esempio I_n è infinita, si potrebbe considerare un suo sottoinsieme numerabile J e risulterebbe

$$+\infty = \frac{1}{n+1}(1+1+\dots) \leq \sum_{i \in J} m(A_i) \leq m(\bigcup_{i \in J} A_i) < +\infty$$

Si conclude che card $I \leq K_0$.

Una dim. analoga si fa se m è σ-misura e σ-finita

cvd

Osservazione (9.3)

Il risultato precednete vale anche se $\mathcal{A}$ è solo un'algebra ed m è una msira finita strettamente positiva su $\mathcal{A}$.

Infatti basta sostituire nella dim. 1 a $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ ed $\underset{i\in J}{A} A_i$

($m(1) < +\infty$ per ipotesi).

§ 10 - m-ideali, m-filtri. Algebre quozienti.

DEF. Se $\mathcal{A}$ è un'algebra Booleana m-completa ed $\mathfrak{J}$ è un suo ideale, diremo che è m-completo o m-ideale se

$$\{A_i;\ i \in I\} \subset \mathfrak{J} \text{ e card } I \leq m \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathfrak{J}$$

Definizione analoga (la duale) si dà per gli m-filtri.

Esempio. A) $\mathfrak{J} = \{A \subset X;\ \text{card } A \leq m\}$ è un m-ideale dell'algebra $\mathfrak{P}(X)$ e $\mathfrak{J}^* = \{A \subset X;\ \text{card}(X - A) \leq m\}$ è un m-filtro.

DEF. Se $\mathfrak{J}$ è un ideale di $\mathcal{A}$ posto

$A \sim B \iff A-B \in \mathfrak{J}$ e $B-A \in \mathfrak{J}$ ($\iff A \triangle B \in \mathfrak{J}$ cfr. §2 prop. 1) risulta $\sim$ una relazione di equivalenza su $\mathcal{A}$ e l'insieme delle classi di equivalenza $\{[A];\ A \in \mathcal{A}\}$

sarà denotato con $\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{J}}$ e chiamato algebra quoziente di $\mathcal{A}$ su $\mathfrak{J}$.

Prop. (10.1) Posto $[A] \cup [B] = [A \cup B], [A] \cap [B] = [A \cap B]$, $-[A] = [-A]$

risulta $\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{J}}$ un'algebra Booleana e posto

$$h(A) = [A]$$

h risulta un omomorfismo di $\mathcal{A}$ su $\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{J}}$ detto omomorfismo naturale.

Poiché un omomorfismo trasforma 0 in 0 e 1 in 1 si ha $[0]$ e $[1]$ sono lo zero ee l'unità di $\frac{A}{\mathfrak{J}}$.

DEF. Col simbolo $\frac{\mathcal{A}}{\ }$ se $E \in \mathcal{A}$ si denota l'insieme $\{A \in \mathcal{A} : A \subset E\}$. E' un'algebra Booleana, con le stesse $\cup$ e $\cap$ di $\mathcal{A}$.

DEF. Se $\mathfrak{F}$ è un filtro col simbolo $\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{F}}$ si deve intendere l'algebra quoziente $\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{J}}$ dove $\mathfrak{J}$ è l'ideale duale di $\mathfrak{F}$ cioé

$\mathfrak{J} = \{-A;\ A \in \mathfrak{F}\}$

Lemma (10.2) $[A] \subset [B] \Leftrightarrow A - B \in \mathfrak{J}$

DIM. $[A] \subset [B] \Leftrightarrow [A-B] = [A] - [B] = [0] \Leftrightarrow A - B \in \mathfrak{J}$

cvd.

Teorema (10.3). Se $\mathfrak{J}$ è un m-ideale di una m-algebra $\mathcal{A}$, allora $\mathcal{A}/\mathfrak{J}$ è una m-algebra e $\forall \{A_i;\ i \in I\} \subset \mathcal{A}$ con card $I \leq m$ risulta

(1) $\bigcup_{i \in I} [A_i] = [\bigcup_{i \in I} A_i]$ e $\bigcap_{i \in I} [A_i] = [\bigcap_{i \in I} A_i]$

DIM.

Poiché $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$, basterà provare la (1) per avere che $\frac{A}{\mathfrak{J}}$ è una m-algebra.

Sia $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Per provare la (1) basta provare che

a) $[A_i] \subset [A]$ $\forall i \in I$ e che

b) $[A_i] \subset [A_0] \quad \forall i \in I \Longrightarrow [A] \subset [A_0]$

Ma per il lemma (10.2) questo equivale a provare che

a') $A_i - A \in \mathfrak{J} \qquad \forall i \in I$

b') $A_i - A_0 \in \mathfrak{J} \quad \forall i \in I \Longrightarrow A - A_0 \in \mathfrak{J}$

Ora la a') è vera in quanto $A_i - A = 0 \in \mathfrak{J}$ e la b') è vera perché da $A_i = A_0 \in \mathfrak{J} \quad \forall i \in I \Longrightarrow A-A_c= \bigcup_{i \in I} (A_i - A_0) \in \mathfrak{J}$ perché $\mathfrak{J}$ è un m-ideale.

cvd

Osservazione (10.1). La (1) non vale in generale se card I > m. Però qualche volta il grado di completezza di $\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{J}}$ può essere superiore a quello di $\mathcal{A}$ e di $\mathfrak{J}$.

Esempi

B) Sia m una n-misura su una n-algebra $\mathcal{A}$. Posto $\mathfrak{J} = \{A \in \mathcal{A} : m(A) = 0\}$ si ha che $\mathfrak{J}$ è un n-ideale, infatti $A \in \mathfrak{J}$ e $B \subset A \Longrightarrow B \in \mathfrak{J}$ (perché $m(B) \leq m(A) = 0$) ed $\mathfrak{J}$ è chiuso rispetto all'$\bigcup_{i \in I}$ con card $I \leq n$, perché $m(\bigcup_{i \in I} A_i) \leq \sum_{i \in I} m(A_i)$ (cfr. NB. Prop. (9.3)).

In particolare se m è una σ-misura su una σ-algebra $\mathcal{A}$, allora $\mathfrak{J}$ è un σ-ideale. Per il T(10.3) $\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{J}}$ è anch'essa una σ-algebra. Tuttavia se m è una σ-misura finita (o σ-finita) allora $\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{J}}$ è un'algebra completa.

Infatti posto $m'([A]) = m(A) \qquad \forall A \in \mathcal{A}$ m' è una σ-misura strettamente positiva su $\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{J}}$, ed è finita (o σ-finita) se lo è m. $\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{J}}$ è quindi completa per la prop. (9.4).

C) Il risultato segnalato in B) vale anche se m è solo una misura finita (non necessariamente σ-misura) su una σ-algebra $\mathcal{A}$.

Infatti vale il seguente:

Teorema (10.4) (Smith e Tarski 1957)

Se $\mathcal{A}$ è una m-algebra, $\mathfrak{J}$ è un ideale m'-completo $\forall$ m'< m, e $\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{J}}$

soddisfa la considizione di m-catena, allora $\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{J}}$ è completo (cfr. [1] pag. 76).

Nel nostro caso essendo m solo una misura $\mathfrak{J}$ è solo un ideale (non σ-completo, in generale). Definita m' come in B) risulta m' una misura sull'algebra $\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{J}}$, finita e strett. positiva. Data la finitezza di m' e la stretta positività, non può esistere un insieme $\{A_i, i \in I\} \subset \frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{J}}$ disgiunti con card $I > \aleph_0$ (cfr. l'osservazione (9.3)), quindi $\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{J}}$ verifica la condizione di σ-catena e quindi per il Teor. (10.4) $\frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{J}}$ è completa.

D) Ricordiamo che in uno sp. topologico X si dice

A <u>perfetto</u> $\overset{\cdot}{\Longleftrightarrow}$ A = Dr.A ; A <u>denso in sé</u> $\overset{\cdot}{\Longleftrightarrow}$ A c Dr.A

A <u>in nessuna parte denso</u> (o <u>rarefatto</u>) $\overset{\cdot}{\Longleftrightarrow}$ $\overset{\circ}{\bar{A}} = \emptyset$ ($\Longleftrightarrow$ $\overline{\overset{\circ}{\overline{A'}}} = X$) .

Se consideriamo $\mathfrak{J}_0 = \{ A \subseteq X : \overset{\circ}{\bar{A}} = \emptyset \}$, $\mathfrak{J}$ è un <u>ideale</u> di $\mathcal{P}(X)$. Infatti è ovvio che se $B \subset A \in \mathfrak{J}_0 \Longrightarrow B \in \mathfrak{J}_0$. Osservato che $A \in \mathfrak{J}_0 \Longleftrightarrow \bar{A} \in \mathfrak{J}_0$ per provare che $\mathfrak{J}_0$ è chiuso per l'unione, basta provarlo per i chiusi. Siano A e B chiusi e $\in \mathfrak{J}_0$, allora $A \cup B$ è un chiuso e se per assurdo $\exists\ \emptyset \neq U$ aperto $\subset A \cup B$ allora questo non può essere contenuto in uno solo dei due, pertanto $U - B \neq \emptyset$, è un aperto ed è contenuto in A (contraddizione).

Un celebre esempio di insieme perfetto in nessuna parte denso è l'<u>insieme di Cantor</u> C , che è di misura (di Lebesegue) zero (cfr. [3]' Cap. 6 pag. 5 oppure [7] pag. 85 e seguenti).

Un insieme $N \subset X$ si dice di <u>prima categoria</u> $\overset{\cdot}{\Longleftrightarrow}$ $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ con $\overset{\circ}{\bar{I}}_n = \emptyset$

Posto $\mathfrak{J}_1 = \{ N \subseteq X : N$ di 1^a categoria$\}$ risulta $\mathfrak{J}_0 \subset \mathfrak{J}_1$ e $\mathfrak{J}_1$ è un <u>σ-ideale</u> di $\mathcal{P}(X)$.

Sorprendentemente se $X = \mathbb{R}$ e μ è la misura di Lebesgue:

(2) $\exists\ N \subset \mathfrak{J}_1$ tale che $\mu(-N) = 0$ ed $\mathbb{R} = N \cup (-N)$

cioé $\mathbb{R}$ è l'unione di un insieme di 1^a categoria ed uno di misura nulla.

Sia $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \ldots\ldots\}$ e sia $I_{n,m}$ l'intervallo aperto di centro q_n ed ampiezza $\frac{1}{2^{n+m}}$. Posto $G_m = \bigcup_{n=1} I_{n,m}$ risulta G_m aperto, $G_1 \supset G_2 \supset \ldots\ldots \supset \mathbb{Q}$, e $\mu(G_m) \leq \frac{1}{2^m}$. Pertanto se $G = \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m$ risulta $\mu(G)=0$.

Basta ora porre $N = -G$ per avere l'asserto, essendo $N = \bigcup_{m=1}^{\infty} (-G_m)$ e $\overset{\circ}{\overline{-G_m}} = \overset{c}{\widehat{-G_m}} = -\overline{G_m} = -\mathbb{R} = \emptyset$.

Ricordiamo ancora che la classe $\mathcal{B}$ degli *insiemi di Borel* è il più piccolo *σ-campo* contenente tutti gli aperti di X, e che $A \subseteq X$ si dice che ha la *proprietà di Baire* se $\exists\, G$ aperto di X tale che $A \triangle G \subset \mathcal{J}_1$.

Denotiamo con $\mathcal{B}_1$ la classe di quest'ult'ultimi insiemi:

$\mathcal{B}_1$ è un σ-campo. Infatti se $A \in \mathcal{B}_1$ e G è un aperto tale che $A \triangle G \in \mathcal{J}_1$, basta osservare che $-\bar{G}$ è aperto e risulta

$$(*)\ (-A) - (-\bar{G}) = \bar{G} - A = (\partial G \cup G) - A \subset \partial G \cup G - A \in \mathcal{J}_1$$

perché $G - A \in \mathcal{J}_1$ e $\overset{\circ}{\overline{\partial G}} = \overset{\circ}{\widehat{\partial G}} = \overset{\circ}{\overparen{\overline{G} \cap \overline{-G}}} = \overset{\circ}{\overline{G}} \cap \overset{\circ}{\overline{-G}} = \overset{\circ}{\overline{G}} - \overline{\overset{\circ}{G}} =$ (G è aperto) $= G - \bar{G} = \emptyset$.

La (*) insieme alla $-\bar{G} - (-A) = A - \bar{G} \subset A - G \subset \mathcal{J}_1$, portano che $-A \in \mathcal{B}_1$.

Se poi $A_n \in \mathcal{B}_1$ per $n = 1,2,\ldots.$ e se G_n è un aperto tale che $A_n \triangle G_n \in \mathcal{J}_1$, posto $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ ed $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, risulta

$$A - G \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - G_n) \in \mathcal{J}_1 ;\ G - A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n - A_n) \in \mathcal{J}_1 \quad \text{e} \quad \text{quindi}$$

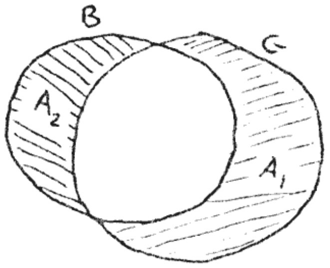
$$A \triangle G \in \mathcal{J}_1 \quad \text{e} \quad A \in \mathcal{B}_1 .$$

Poiché se G è un aperto, evidentemente $G \in \mathcal{B}_1$ segue che

$$(3) \qquad \mathcal{B} \subset \mathcal{B}_1$$

Se denotiamo con $\mathcal{J} = \mathcal{B} \cap \mathcal{J}_1$, per cui $\mathcal{J}$ è un σ-ideale del σ-campo $\mathcal{B}$, risulta $\mathcal{B}/\mathcal{J}$ una σ-algebra per il teorema (10.3), ma facciamo vedere che è addirittura un'algebra Booleana completa (discorso analogo si può fare per $\mathcal{B}_1$).

Se $B \in \mathcal{B}$, allora (tenuto presente che $B \in \mathcal{B}_1$) G aperto tale che $B \Delta G \in \mathcal{J}$, o equivalentemente B è della forma $B = (G-A_1) \cup A_2$ con $A_1, A_2 \in \mathcal{J}$.



Pertanto $[B] = [G]$ e quindi

$$\mathcal{B}/\mathcal{J} = \{ [G] \ ; \ G \text{ aperto in } X \}.$$

Consideriamo $A'_t = [G_t]$, con G_t aperto, per $t \in T$ e T arbitrario. Veremo che $\bigcup_{i \in T} A'_t \in \mathcal{B}/\mathcal{J}$. Sia $G = \bigcup_{t \in T} G_t$ (unione insiemistica) e poniamo $A' = [G]$. Faremo vedere che A' è l'unione Booleana delle A'_t. Per la a') e b') del teorema (10.3) basterà far vedere che:

a') $G_t - G \in \mathcal{J} \quad \forall t \in T$

b') $A_0 \in \mathcal{B}$ e $G_t - A_0 \in \mathcal{J} \quad \forall\, t \in T \Longrightarrow G - A_0 \in \mathcal{J}$.

La a') è ovvia in quanto $G_t - G = \emptyset$.

Sia ora $A_0 \in \mathcal{B}$ e $G_t - A_0 \in \mathcal{J}$ $\forall\, t \in T$, poiché $G_t - A_0 = (G-A_0) \cap G_t$ risulta $G_t - A_0$ aperto in $G-A_0$, allora $G-A_0$ risultando unione di aperti (in $G-A_0$) di prima categoria è di prima categoria (cfr. per es. [6] pag. 201), cioé $G-A_0 \in \mathcal{J}$.

Osserviamo che in prativa si è provato che

$$(4) \qquad \bigcup_{t \in T} [G_t] = [\bigcup_{t \in T} G_t]$$

ma questo non vuol dire che la (4) vale $\forall\, A_t \in \mathcal{B}$ $(t \in T)$, infatti $\{x_t\} \in \mathcal{B}$ ma non è detto che sia

$\bigcup_{t\in T}[\{x_t\}] = [\bigcup_{t\in T}\{x_t\}]$ e questo perché potrebbe non essere $\bigcup_{t\in T}\{x_t\} \in \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ non è completa in generale).

Dalla (4) passando ai complementari si ha se F_t sono chiusi:

$$(4') \qquad \bigcap_{t\in T}[F_t] = [\bigcap_{t\in T} F_t] .$$

Osservazione (10.2). Abbiamo visto (cfr. Osserv. (9. 0)) che se $\mathcal{A}$ ed $\mathcal{A}'$ sono isomorfe ed $\mathcal{A}$ è m-completa (completa) allora tale è anche $\mathcal{A}'$, però se due algebre sono complete non è affatto detto che siano isomorfe. Si veda a proposito il seguente esempio.

Esempio E). Sia $\mathcal{B}$ la σ-algebra dei Boreliani di $\mathbb{R}$, μ la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$, $\mathcal{J}_0 = \{A \in \mathcal{B} : \mu(A) = 0\}$ $\mathcal{J}_1 = \{A \in \mathcal{B};\ A \text{ di } 1^a \text{ categoria}\}$. Le algebre Booleane $\mathcal{A}_0 = \mathcal{B}/\mathcal{J}_0$ ed $\mathcal{A}_1 = \mathcal{B}/\mathcal{J}_1$ sono entrambe complete, per quanto visto negli esempi B) e D), ma non sono isomorfe.

Premettiamo il seguente risultato:

Lemma (10.5)

Se $\mathcal{A}$ ed $\mathcal{A}'$ sono σ-algebre, $h : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ è un isomorfismo surgettivo, $m' : \mathcal{A}' \to [0,+\infty]$ è una σ-misura, σ-finita e non identicamente nulla, allora posto $\forall A \in \mathcal{A}$

$$m(A) = m'(h(A))$$

m è una σ-misura, σ-finita e non identicamente nulla.

(Basta tenere presente la prop. 6 del §3 e la (4) del §8).

Supponiamo quindi che siano $\mathcal{A}_0$ ed $\mathcal{A}_1$ isomorfe e sia $h : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_0$ un isomorfismo. Su $\mathcal{A}_0$, μ induce una σ-misura, σ-finita e non identicamente nulla, ponendo

$$m([A]_0) = \mu(A) \qquad \forall A \in \mathcal{B}$$

Tale misura è strettamente positiva. Posto $\forall A' \in \mathcal{A}_1$

$$m'(A') = m(h(A'))$$

risulta che m' ha le stesse proprietà di m per il Lemma (10.5) m' induce a sua volta su $\mathcal{B}$ una σ-finita , σ-misura ν ponendo

$$\nu(A) = m'([A]_1) \qquad \forall A \in \mathcal{B} .$$

Tale misura sarà nulla su $\mathcal{J}_1$. Per il Teorema di Teoria della misura (cfr. [1] pag. 77), analogo ad riultato (2), $\exists A_0 \in \mathcal{B}$ con $\nu(A_0) = 0$ ed $\exists A_1 \in \mathcal{J}_1$ $\ni'$ $\mathbb{R} = A_0 \cup A_1$; ma questo porta che ν e poi m' ed m sono identicamente nulle (assurdo).

§11. - m-omomorfismi, atomi, ed interpretazione negli spazi di Stone.

DEF. Siano $\mathcal{A}$ ed $\mathcal{A}'$ due algebre Booleane ed $h : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ un omomorfismo.

Supponiamo che esistano:

$$(1) \quad A = \bigcup_{t \in T}^{\mathcal{A}} A_t \qquad \text{e} \qquad \bigcup_{t \in T}^{\mathcal{A}'} h(A_t) \quad (2)$$

Da $A_t \subset A$ segue che $h(A_t) \subset h(A)$ e quindi $\bigcup_{t \in T}^{\mathcal{A}'} h(A_t) \subset h(A)$.

Orbene diremo che l'omomorfismo h preserva l'unione Boolena (1) se esiste la (2) e risulta:

$$(3) \qquad h(A) = \bigcup_{t \in T}^{\mathcal{A}'} h(A_t) \quad .$$

Analogamente si definisce un omomorfismo che preserva l'intersezione .

Diremo che h è un m-omomorfismo se preserva tutte le unioni (1) (e quindi tutte le intersezioni), con card $T \leq m$.

L'omomorfismo h si dice poi completo se è un m-omomorfismo $\forall m$.

Le definizioni appena date vanno confrontate con la (4) del § 8, precisamente se h è un isomorfismo surgettivo allora è completo.

DEF. 2. $0 \neq a \in \mathcal{A}$ si dice <u>atomo</u> di $\mathcal{A}$ se non eiste $B \in \mathcal{A} - \{0,a\}$ con $B < a$. Un'algebra A si dice <u>atomica</u> $\Longleftrightarrow \forall A \in \mathcal{A} - \{0\}\ \exists$ un atomo $a \subset A$.

La nozione di atomo per un'algebra Booleana è l'analoga di quella di insieme ridotto ad un sol punto (singoletto) per un campo.

Si vede facilmente che

(4) (a atomo di $\mathcal{A}$) $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}_a = \{A \in \mathcal{A} : a \subset A\}$ è un ultrafiltro.

PROP. (11.1). Sia $\mathcal{A}$ un'algebra Booleana e poniamo $\forall A \in \mathcal{A}$

$$h(A) = \{a \in \mathcal{A} : a \text{ atomo di } \mathcal{A} \text{ e } a \subset A\} .$$

Allora h è un omomorfismo completo di $\mathcal{A}$ nel campo $\mathcal{P}(X)$ dove $X = h(1)$ è l'insieme di tutti gli atomi di $\mathcal{A}$. Se $\mathcal{A}$ è atomica allora h è un isomorfismo.

Se h è un isomorfismo di $\mathcal{A}$ sul campo $\mathcal{A}^*$ dei clopen dello spazio di Stone X di $\mathcal{A}$ allora

a atomo di $\mathcal{A} \Longleftrightarrow h(a)$ è un singoletto di X

a atomo di $\mathcal{A}$ e $h(a) \in \mathcal{A}^* \Longleftrightarrow h(a)$ è un punto isolato di X

$\mathcal{A}$ atomica $\Longleftrightarrow$ $Y = \{x \in X : x \text{ isolato}\}$, $\bar{Y} = X$

$\mathcal{A}$ priva di atomi $\Longleftrightarrow$ X è denso in sé, cioé non ha punti isolati.

Evidentemente ogni algebra Booleana finita è <u>atomica</u> ed ha 2^n elementi se n è il numero degli atomi.

DEF. 3. - Sia X uno spazio topologico, $C \subset X$, diremo che C è un <u>m-chiuso</u> (<u>m-aperto</u>) $\overset{\cdot}{\Longleftrightarrow}$ $C = \bigcap_{t \in T} A_t$ $\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right)$ con A_t clopen e card $T \leq m$.

DEF. 4 - Se X è uno spazio topologico totalmente sconnesso diremo che è <u>estremamente sconnesso</u> $\overset{\cdot}{\Longleftrightarrow}$ $\forall A$ aperto : $\bar{A}$ aperto ($\Longleftrightarrow \forall C$ chiuso $\overset{\circ}{C}$ é chiuso).

Orbene si ha il seguente

Teorema (11.2). Se $\mathcal{A}$ è un'algebra Booleana ed X é il suo spazio di Stone si ha:

a) $\mathcal{A}$ m-completa $\Longleftrightarrow \forall A$ m-aperto di X: $\bar{A}$ è aperto
$\Longleftrightarrow \forall C$ m-chiuso di X : $\overset{\circ}{C}$ è chiuso

b) $\mathcal{A}$ completa $\Longleftrightarrow$ X è estremamente sconnesso (cfr. [1] pag.85-86).

Col teorema di rappresentazione si è visto che ogni algebra Booleana è isomorfa ad un campo d'insiemi $\mathcal{A}^*$. Se $\mathcal{A}$ è una m-algebra, anche $\mathcal{A}^*$ è una m-algebra, ma in generale non è un m-campo (cfr. Osserv. (9.1) ed esempi A ecc.).

Ma addirittura è possibile provare che $\forall$ cardinale infinito m esistono algebre che non sono isomorfe ad alcun m-campo (cfr. [1] pag. 97).

Dal teorema di rappresentazione segue il seguente

Teorema (11.3). Se $\mathcal{A}$ è una m-algebra allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

1) $\mathcal{A}$ è isomorfa ad un m-campo d'insiemi
2) $\forall A \in \mathcal{A} - \{0\}$ $\exists$ un m-ultrafiltro β $\ni'$ $A \in \beta$
3) $\forall A \in \mathcal{A} - \{1\}$ $\exists$ un m-ideale massimale $\mathfrak{I}$ $\ni'$ $A \in \mathfrak{I}$
4) $\forall A \in \mathcal{A} - \{0\}$ $\exists$ una m-misura a 2 valori m $\ni'$ $m(A) = 1$
5) $\forall A \in \mathcal{A} - \{0\}$ $\exists$ un m-omomorfismo " h $\ni'$ $h(A) = 1$ $(\in \mathcal{A})$
(cfr. [1] pag.98).

Teorema (11.4)

$\mathcal{A}$ algebra Booleana completa è isomorfa ad un campo completo d'insiemi $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$ è atomica.

In tal caso $\mathcal{A}$ è isomorfa a $\mathcal{P}(X)$ dove X è l'insieme degli atomi di $\mathcal{A}$.
(cfr. [1] pag. 105).

Teorema (11.5)

Per ogni σ-algebra $\mathcal{A}$ esiste un σ-campo $\mathfrak{F}$ ed un σ-ideale $\mathfrak{I}$ tale che $\mathcal{A}$ è isomorfa ad $\mathfrak{F}/_{\mathfrak{I}}$.

Precisamente

Se X è lo spazio di Stone di $\mathcal{A}$, sia $\mathfrak{F}$ il più piccolo σ-campo contenente $\mathcal{A}^*$ (l'insieme dei clopen di X), $\mathfrak{I} = \{ B \in \mathfrak{F} : B$ di 1^a categoria$\}$ (è un σ-ideale). Allora $\mathcal{A}$ è isomorfa ad $\mathfrak{F}/_{\mathfrak{I}}$ e precisamente se $h : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$ è un isomorfismo surgettivo, allora

$$\tilde{h}(A) = [h(A)]_{\mathfrak{I}} \qquad \forall A \in \mathcal{A}$$

è un isomorfismo di $\mathcal{A}$ su $\mathfrak{F}/_{\mathfrak{I}}$.
(Per la dim. cfr. [1] pag. 117).

Il teorema precedente non vale per $m > \aleph_0$.

§ 12 - Applicazioni alla teoria della misura.

Data una misura μ su un campo $\mathfrak{F}$ (cfr. §2 -c) non è sempre possibile estenderla ad una σ-misura μ' sul σ-campo $\mathfrak{F}'$ σ-generato da $\mathfrak{F}$ ($\mathfrak{F}'$ è il più piccolo σ-campo contenente $\mathfrak{F}$).

La condizione necessaria e sufficiente che permette tale estensione è la seguente:

(1) $\forall \{A_n ; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathfrak{F}$ disgiunti, se $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}$ allora

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad .$$

Ricordato che se $\mathfrak{F}$ è un campo perfetto, ogni unione numerabile di elementi non vuoti e disgiunti di $\mathfrak{F}$, non appartiene ad $\mathfrak{F}$ (cfr. Prop. 15,§ 6), si ha:

Prop. (12.1). Ogni misura su un campo perfetto, può essere estesa ad una σ-misura.

D'altro canto ogni campo $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di X è isomorfo ad un campo perfetto d'insiemi $\mathcal{F}'$, ottenuto aggiungendo ad X qualche punto (cfr. § 7 Esempio 6). Se $h : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ è l'isomorfismo (su) e si pone

$$(2) \qquad \mu'(h(A)) = \mu(A) \qquad \forall A \in \mathcal{F}$$

allora μ' è una misura su $\mathcal{F}'$ che verifica la (1) e quindi è una σ-misura.

In particolare si può considerare come $\mathcal{F}'$ il campo $\mathcal{F}^*$ dei clopen dello spazio di Stone $[\mathcal{F}]$ di $\mathcal{F}$ e in tal caso scriveremo in luogo della (2):

$$(2)' \qquad \mu^*(A^*) = \mu(A) \qquad \forall A \in \mathcal{F} \ .$$

C'è un altro modo per ottenere μ' (σ-misura) da μ senza passare attraverso l'isomorfismo h, occorre però che μ sia finita.

Sia $\mathcal{J} = \{A \in \mathcal{F} : \mu(A) = 0\}$, consideriamo $\mathcal{A} = \mathcal{F}/_{\mathcal{J}}$ e definiamo

$$(3) \qquad \bar{\mu}([A]_{\mathcal{J}}) = \mu(A) \qquad \forall A \in \mathcal{F} \ .$$

$\bar{\mu}$ risulta una misura finita e strettamente positiva sull'algebra Booleana $\mathcal{A}$, ed induce una metrica su $\mathcal{A}$, ponendo

$$(4) \qquad \rho(A,B) = \bar{\mu}(A-B) + \bar{\mu}(B-A) = \bar{\mu}(A \triangle B) \qquad \forall A,B \in \mathcal{A} \ .$$

(A,ρ) è uno spazio metrico, in generale non completo.

Se chiamiano $\mathcal{A}'$ il completamento (Cantoriano) di $\mathcal{A}$, risulta $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}'$. Poiché risulta che (4)

$$(5) \qquad |\bar{\mu}(A) - \bar{\mu}(B)| \leq \rho(A,B)$$

la $\bar{\mu}$ è continua su $\mathcal{A}$ e quindi può essere estesa ad una funzione reale e continua $\bar{\mu}'$ su $\mathcal{A}'$. Estendendo le operazioni Booleane di $\mathcal{A}$ su $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}'$ diventa una σ-algebra Booleana ed $\bar{\mu}'$ è una σ-misura strettamente positiva su $\mathcal{A}'$, isomorfa alla μ' definita dalle (2), nel senso che $\exists\ h'$

isomorfismo di $\mathfrak{F}'$ su $\mathcal{A}'$ tale che

$$\mu'(A) = \bar{\mu}'\ h'(A) \qquad \forall A \in \mathfrak{F}'$$

Un'altra interessante applicazione è l'interpretazione delle funzioni misurabili nello spazio di Stone.

DEF. Sia $\mathfrak{F}$ un σ-campo di sottoinsiemi di X ed $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

Si dice che f è $\mathfrak{F}$-misurabile $\overset{\cdot}{\Longleftrightarrow}$ $\forall a \in \mathbb{R} : \{x \in X : f(x) < a\} \in \mathfrak{F}$. Nel seguito scriveremo semplicemente $\{f < a\}$ in luogo di $\{x \in X : f(x)<a\}$. Molto spesso conviene identificare funzioni misurabili modulo un σ-ideale $\mathfrak{J}$ di $\mathfrak{F}$. Precisamente diremo che due funzioni f_1, f_2 $\mathfrak{F}$-misurabili sono $\mathfrak{J}$-equivalenti $\overset{\cdot}{\Longleftrightarrow}$ $\{x \in X : f_1(x) \neq f_2(x)\} \in \mathfrak{J}$ (Nella teoria della misura si identificano le funzioni misurabili, diverse solo su un insieme di misura nulla).

Denotiamo con $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(X,\mathcal{A})$ l'insieme delle funzioni reali $\mathcal{A}$-misurabili, dove $\mathcal{A}$ è un σ-campo di sottoinsiemi di X. Consideriamo lo spazio di Stone $[\mathcal{A}]$ di $\mathcal{A}$ e sia $h : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$ l'isomorfismo introdotto nel Teorema 16 del § 7, di cui conserviamo le notazioni.

Se $f \in \mathfrak{M}$ allora per definizione

(6) $\forall a \in \mathbb{R} : \{f < a\} \in \mathcal{A}$.

Se $\beta \in [\mathcal{A}]$ allora $\forall a \in \mathbb{R}$, risultando $\{f < a\} \in \mathcal{A}$, deve essere $\{f < a\} \in \beta$ oppure $-\{f < a\} = \{f \geq a\} \in \beta$ il che porta che definito

$$(7) \qquad \begin{aligned} \mathbb{R}_1 &= \{a \in \mathbb{R} : \{f \geq a\} \in \beta\} \\ \mathbb{R}_2 &= \{a \subset \mathbb{R} : \{f < a\} \in \beta\} \end{aligned}$$

risulta $(\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2)$ una partizione di $\mathbb{R}$. Osservato che

$a < b \Longrightarrow \{f \geq b\} \subset \{f \geq a\}$ $\quad (b \in \mathbb{R}_1 \Longrightarrow]-\infty, b] \subset \mathbb{R}_1)$

$a < b \Longrightarrow \{f < a\} \subset \{f < b\}$ $\quad (a \in \mathbb{R}_2 \Longrightarrow [a, +\infty[\subset \mathbb{R}_2)$

si ha che $(\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2)$ costituisce una coppia di insiemi separati e quindi contigui. Se chiamiamo con ℓ l'elemento separatore risulta

$$\sup \mathbb{R}_1 = \ell = \inf \mathbb{R}_2 . \tag{8}$$

Orbene definiamo

$$f^*(\beta) = \ell \qquad \forall \beta \in [\mathcal{A}] . \tag{9}$$

Ricordiamo che se φ è un filtro di $\mathcal{A}$ ed $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ si definisce (cfr. ad esempio [2])

$$\min\lim_{\varphi} f = \sup_{A\in\varphi} \inf f(A) = \ell'$$

$$\max\lim_{\varphi} f = \inf_{A\in\varphi} \sup f(A) = \ell''$$

Risulta

$$\inf f(X) \leq \ell' \leq \ell'' \leq \sup f(X) \tag{11}$$

se accade che $\ell' = \ell''$ allora si definisce

$$\lim_{\varphi} f = \ell' = \ell'' \tag{12}$$

Orbene proviamo che, con le notazioni introdotte, si ha

Proposizione (12.2)

$$f^*(\beta) = \lim_{\beta} f \qquad \forall \beta \in [\mathcal{A}] \tag{13}$$

DIM .

Essendo $f^*(\beta)$ l'elemento separatore di $\mathbb{R}_1$ ed $\mathbb{R}_2$, fissato $\varepsilon > 0$

$$\exists\, a \in \mathbb{R}_1 \quad \exists\, b \in \mathbb{R}_2 \ni' \quad b - a < \varepsilon$$

Risulta $A = \{f \geq a\} \in \beta$, $B = \{f < b\} \in \beta$.

Pertanto $\exists\, A,B \in \beta \ni'$ $a \leq \inf f(A)$ e $\sup f(B) \leq b$ e poi

$$\sup f(B) - \inf f(A) \leq b - a < \varepsilon$$

cvd

Ci proponiamo di provare che l'applicazione $f^* : [\mathcal{A}] \to \mathbb{R}$ è continua. A tal fine è utilissimo il seguente

Lemma (12.3)

$\forall a \in \mathbb{R}$ risulta

(14) $$\{f^* < a\} \subset \{f < a\}^* \subset \{f^* \leq a\}$$

$$\{f^* > a\} \subset \{f \geq a\}^* \subset \{f^* \geq a\}$$

(15) $$\{f^* < a\} = \bigcup_{b<a} \{f < b\}^* \; (= - \{f^* \geq a\})$$

$$\{f^* > a\} = \bigcup_{b>a} \{f \geq b\}^*$$

DIM.

$$\beta \in \{f^* < a\} \iff f^*(\beta) < a \implies a \in \mathbb{R}_2 \iff \{f<a\} \in \beta \iff \beta \in \{f<a\}^*$$

viceversa

$$\beta \in \{f < a\}^* \iff \{f < a\} \in \beta \iff a \in \mathbb{R}_2 \iff f^*(\beta) \leq a \iff \beta \in \{f^* \leq a\}$$

Per provare la (15) basta osservare che

$$f^*(\beta) < a \iff \exists b \ni' f^*(\beta) \leq b < a \iff \exists b < a \ni' b \in \mathbb{R}_2$$
$$\iff \exists b < a \ni' \{f < b\} \in \beta \iff \exists b < a \ni' \beta \in \{f < b\}^*$$

Analogamente si provano le altre.

cvd

Proposizione (12.4)

f^* definita dalla (13) se $f \in \mathcal{M}$, è continua.

DIM.

Basta fare vedere che $f^{*-1}(]a,b[)$ è un aperto $\forall a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

$f^{*-1}(]a,b[) = \{f^{*} > a\} \cap \{f^{*} < b\}$, quindi per la (15) del Lemma (12.3), poiché per ogni $C \in \mathbb{R}$ risulta $\{f < c\}, \{f \geq c\} \in \mathcal{A}$ e quindi $\{f \geq c\}^{*}$ e $\{f < c\}^{*}$ sono i clopen $(\in \mathcal{A}^{*})$ di $[\mathcal{A}]$, risulta $\{f^{*} < b\}$ un aperto di $[\mathcal{A}]$ e lo stesso vale per $\{f^{*} > a\}$ (si ricordi che $\mathcal{A}^{*}$ è base per la topologia su $[\mathcal{A}]$ cfr. osserv.5 § 7).

cvd

Denotiamo con $C([\mathcal{A}])$ l'insieme delle funzioni reali continue su $[\mathcal{A}]$. L'isomorfismo h di $\mathcal{A}$ su $\mathcal{A}^{*}$, come si è visto induce l'applicazione $h_1 : \mathfrak{M}(X,\mathcal{A}) \to C([\mathcal{A}])$ $\ni'$ $h_1(f) = f^{*}$.

Osserviamo che $\forall x \in X$ risulta

(16) $$f^{*}(\beta_x) = f(x) .$$

Infatti detto $l = \lim_{\beta_x} f$, per definizione

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \beta_x \quad \ni' \quad \forall y \in A : |f(y) - l| < \varepsilon$.

Poiché $x \in A \quad \forall A \in \beta_x$ deve rsiultare $|f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$ e quindi $f(x) = l$.

Dalla (16) segue subito che

PROPOSIZIONE (12.5)

h_1 è una bigezione la cui inversa $h_1^{-1} : C([\mathcal{A}]) \to \mathfrak{M}$, $g \to \tilde{g}$ è definita da $\tilde{g}(x) = g(\beta_x)$ $\forall x \in X$.

DIM

La h_1 è ingettiva in quanto se $f^{*} = g^{*}$ deve anche essere $f^{*}(\beta_x) = g^{*}(\beta_x)$ $\forall x \in X$, cioé $f = g$ per la (16).

La h_1 è surgettiva, infatti se $g \in C([\mathcal{A}])$, posto $\tilde{g}(x) = g(\beta_x)$ $\forall x \in X$, si prova che $\tilde{g} : X \to \mathbb{R}$ è misurabile. A tale scopo proviamo a parte il seguente

Lemma (12.6)

$\forall a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ $\exists A \in \mathcal{A}$ tale che

(17) $$\{ \tilde{g} \geq b \} \subset A \subset \{ \tilde{g} > a \}$$

DIM.

Se $\tilde{g}(x) \geq b > a$ allora $g(\beta_x) \geq b > a \Rightarrow \beta_x \in \{ g \geq b \} \subset \{ g > a \}$.

Essendo g continua risulta $\{ g \geq b \}$ chiuso e $\{ g > a \}$ aperto in $[\mathcal{A}]$ e quindi (cfr. Teorema 16 §7 e Teorema 13 §6) $\exists \{ A_i ; i \in I \} \subset \mathcal{A}$ $\ni'$

$$\{ g \geq b \} \subset \{ g > a \} = \bigcup_{i \in I} A_i^* \ .$$

Per la compatezza di $[\mathcal{A}]$ e quindi di $\{ g \geq b \}$ $\exists J$ finito $\subset$ I tale che

$$\{ g \geq b \} \subset \bigcup_{i \in J} A_i^* \subset \{ g > a \} \ .$$

Risulta, posto $A = \bigcup_{i \in J} A_i$, $A \in \mathcal{A}$ e

$$\{ g \geq b \} \subset A^* \subset \{ g > a \} .$$

Da qui segue la (17) infatti

$$\tilde{g}(x) \geq b \Rightarrow \beta_x \in \{ g \geq b \} \Rightarrow \beta_x \in A^* \Rightarrow A \in \beta_x \Rightarrow x \in A \ ;$$

$$x \in A \Rightarrow A \in \beta_x \Rightarrow \beta_x \in A^* \Rightarrow g(\beta_x) > a \Rightarrow \tilde{g}(x) > a .$$

cvd

Continuazione della dim. della Prop. (12.5)

Dal Lemma (12.6) segue che $\forall a \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists A_n \in \mathcal{A}$ $\ni'$

$$\{ \tilde{g} \geq a + \frac{1}{n} \} \subset A_n \subset \{ \tilde{g} > a \}$$

e poiché $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{ \tilde{g} \geq a + \frac{1}{n} \} = \{ \tilde{g} > a \}$ segue che $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{ \tilde{g} > a \}$ il che prova : $\{ \tilde{g} < a \} \in \mathcal{A}$.

cvd

Corollario (12.7)

$\forall g \in C([\mathcal{A}])$ risulta $\overline{\tilde{g}(X)} = g([\mathcal{A}])$ che è un compatto.

DIM.

Essendo $[\mathcal{A}]$ compatto, tale è anche $g([\mathcal{A}])$. Ricordato che $\{\beta_x ; x \in X\}$ è denso in $[\mathcal{A}]$ segue

$$\overline{\tilde{g}(X)} = \overline{\{ g(\beta_x); x \in X\}} = g([\mathcal{A}])$$

cvd

(Si ricordi che per le funzioni continue $g(\bar{A}) \subset \overline{g(A)}$)

Osservazione (12.1)

Da quanto detto segue che la funzione $f : X \quad \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-misurabili (dove $\mathcal{A}$ è una σ-algebra) corrispondono (mediante una bigezione) alle funzioni $f^* : [\mathcal{A}] \to \overline{\mathbb{R}}$ continue. Poiché se si considerano $f^* : [\mathcal{A}] \to \overline{\mathbb{R}}$ allora $f^*([\mathcal{A}])$ è limitato, per quanto detto nel Corollario (12.7) si ha che queste funzioni corrispondono (nella bigezione precedente) alle funzioni $\mathcal{A}$-misurabili e limitate.

Osservazione (12.2)

Nel caso in cui $\mathcal{A}$ è solo un'algebrae non una σ-algebra, allora la definizione di funzione $\mathcal{A}$-misurabile data, non è più soddisfacente. In topologia non è più vero che:

(18) $(\forall a \in \mathbb{R} : \{ f < a \} \in \mathcal{A}) \iff (\forall B$ Boreliano di $\mathbb{R} : f^{-1}(B) \in \mathcal{A})$.

Anche se si dà come definizione la proposizione a destra della (18), non si registra un notevole miglioramento. In particolare la classe delle funzioni $\mathcal{A}$-misurabili potrebbe essere molto esigua, come mostrano i seguenti esempi.

ESEMPIO (12.1). Sia X un insieme infinito ed $\mathcal{A}$ l'algebra dei suoi sottoinsiemi finiti o cofiniti. Orbene se si usa la definizione

$f : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-misurabile $\iff$ $\forall B$ Boreliano di $\mathbb{R} : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ si ottiene che

$$f \in \mathfrak{M} \implies f(X) \quad \text{è finito} \quad .$$

Infatti supposto $f \in \mathfrak{M}$, se per assurdo il codominio $f(X)$ è infinito, allora possiamo trovare due suoi sottoinsiemi numerabili e disgiunti A e B. Poiché A e B sono Boreliani (perché numerabili) di $\mathbb{R}$, deve essere $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Necessariamente $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ sono cofiniti, ma ciò è assurdo in quanto da $A \subset \mathbb{R}-B$ segue che $f^{-1}(A) \subset - f^{-1}(B)$ (il 1° è infinito, mentre il 2° è finito).

ESEMPIO (12.2). Sia $X = \mathbb{R}$ e sia $\mathcal{A}$ l'algebra generata dagli intervalli di $\mathbb{R}$ limitati o non, cioé

$$A \in \mathcal{A} \iff \quad A = \bigcup_{k=1}^{n} I_k \quad \text{con } I_h \cap I_k = \emptyset \text{ e } I_k \text{ intervallo di } \mathbb{R}$$

(è l'algebra dei plurintervalli finiti di $\mathbb{R}$). Orbene si prova che

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \mathcal{A}\text{-misurabile} \implies f(\mathbb{R}) \quad \text{è al più numerabile.}$$

Osservazione (12.3)

Se $(X,\mathcal{T})$ è uno spazio topologico, qual'è la più piccola σ-algebra $\mathcal{A}$ che rende $\mathcal{A}$-misurabile tutte le funzioni reali continue, cioé tale che

$$(19) \qquad C(X;\mathbb{R}) \subset \mathfrak{M}(X,\mathcal{A}) \text{ ? } .$$

Poiché se $f : X \quad \mathbb{R}$ è continua, $\forall A$ aperto di $\mathbb{R}$ e $\forall C$ chiuso di $\mathbb{R}$, risulta $f^{-1}(A)$ aperto di X ed $f^{-1}(C)$ chiuso di X, sicuramente la σ-algebra $\mathcal{B}$ di Borel (di X) verifica la (19), ma non è la più piccola possibile.

La σ-algebra in oggetto è quella generata dai clopen di X e prende il nome di σ-algebra degli insiemi di Baire.

Se la denotiamo con $\mathcal{B}_0$ risulta $\mathcal{B}_0 \subset B$.

Osservazione (12.4)

Le considerazioni precedenti suggeriscono di definire le funzioni reali $\mathcal{A}$-misurabili, nel caso in cui $\mathcal{A}$ sia solo un'algebra, come le funzioni corrispon denti a $C([\mathcal{A}])$ mediante l'applicazione definita da

$$\tilde{g}(x) = g(\beta_x) \qquad \forall x \in X \qquad \forall g \in C([\mathcal{A}]) \quad .$$

In tal caso tali funzioni godono delle proprietà (17) del Lemma (12.6). Viceversa se $f : X \to \mathbb{R}$ è una funzione che verifica la (17) si può provare che $\forall \beta \in [\mathcal{A}] \ \exists \lim_{\beta} f$ e posto $f^*(\beta) = \lim_{\beta} f$ risulta $f^* \in C([\mathcal{A}])$.

Pertanto la (17) può essere assunta come definizione di funzione $\mathcal{A}$-misurabile.

In [8] G. Greco dà una definizione ancora più generale e precisamente, se $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ e $\emptyset \in \mathcal{A}$, si dice che

$$f : X \to \overline{\mathbb{R}} \text{ è } \mathcal{A}\text{-misurabile } \overset{\cdot}{\Longleftrightarrow} \forall a,b \in \mathbb{R} \text{ con } b > a \ \exists A \in \mathcal{A} \ \ni' \ \{f \geq b\} \subset A \subset \{f > a\} \ .$$

Non si richiede cioé neanche che $\mathcal{A}$ sia un'algebra.

Denotato con $\mathcal{M}^+ = \mathcal{M}^+(X,\mathcal{A}) \cap [0,+\infty]^X$ sempre in [8] si prova il seguente teorema.

Teorema (12.8)

1) $f \in \mathcal{M}^+$ e $a \in [0,+\infty) \Longrightarrow a \cdot f,\ f \wedge a,\ (f \vee a) - a \in \mathcal{M}^+$

2) $f \in \mathcal{M}^+$, $\psi : [0,+\infty] \to [0,+\infty]$ è cont. e crescente e $\psi(0) = 0 \Longrightarrow \psi \circ f \in \mathcal{M}^+$

3) $f_n \in \mathcal{M}^+$ e $f_n \xrightarrow{n} f$ uniformemente $\Longrightarrow f \in \mathcal{M}^+$.

4) Se $\mathcal{A}$ è un'algebra (o più semplicemente un anello) allora

$$f,g \in \mathcal{M}^+ \Longrightarrow f \wedge g,\ f \vee g,\ f + g,\ f \cdot g \in \mathcal{M}^+$$

5) Se $\mathcal{A}$ è una σ-algebra allora

$$f \ \mathcal{A}\text{-misurabile} \Longleftrightarrow \forall a \in \mathbb{R} : \{f < a\} \in \mathcal{A}$$

Osservazione (12.5) Se $\mathcal{A}$ è solo un'algebra ed $f,g \in \mathcal{M}$ non è affatto detto che sia $f + g \in \mathcal{M}$. Infatti se ad esempio $\mathcal{A} = \{ A \subset \mathbb{N};\ A \text{ finito o cofinito} \}$

dire che $f : \mathbb{N}\ \overline{\mathbb{R}}$ sia $\mathcal{A}$-misurabile, equivale a dire che $\exists \lim_n f(n) \in \overline{\mathbb{R}}$ pertanto nel caso in cui $\lim_n f(n)=+\infty$ e $\lim_n g(n)=-\infty$ risultano $f,g \in \mathcal{M}$, ma non è affatto detto che sia $f+g \in \mathcal{M}$. Se $\mathcal{A}$ è invece una σ-algebra allora $\mathcal{M}$ è chiusa rispetto alla somma.

Un particolare tipo di funzioni $\mathcal{A}$ misurabili sono le funzioni $\mathcal{A}$-semplici $S = S(X,\mathcal{A})$ che sono combinazioni lineari di funzioni caratteristiche φ_A con $A \in \mathcal{A}$. Orbene in [8] si prova che ogni funzione $\mathcal{A}$-misurabile è il limite uniforme di funzioni $\mathcal{A}$-semplici.

In altre parole introdotta su $\mathcal{M}$ la metrica (della converg.-uniforme)

$$d(f,g) = \sup\{|\text{arctg } f(x) - \text{arctang } (x)| : x \in \mathbb{R}\}$$

$(\mathcal{M},d)$ diventa uno spazio metrico ed $\bar{S} = \mathcal{M}$.

Denotato con $\mathcal{M}_b$ l'insieme delle funzioni $\mathcal{A}$-misurabili e limitate, quest'insieme è invece un'algebra di funzioni isomorfe all'algebra delle funzioni continue e limitate definite sullo spazio di Stone $[\mathcal{A}]$ associato ad $\mathcal{A}$ (cfr. Oss. (12.1) (12.4). e [8]).

Tra le tante conseguenze del teorema di rappresentazione di Stone, segnaliamo la seguente proposizione che dà utili informazioni sul codominio di una misura.

Proposizione (12.9) Se μ è una misura sull'algebra $\mathcal{A}$ allora detto $R_\mu = \{\mu(A) : A \in \mathcal{A}\}$, risulta che $\overline{R_\mu}$ è il codominio di una σ-misura su una σ-algebra.

DIM.

Definita $\mu^*(A^*) = \mu(A)$ $\forall A \in \mathcal{A}$, per quanto visto μ^* è una σ-misura sull'algebra $\mathcal{A}^*$ (dei clopen di $[\mathcal{A}]$).

Denotata con $\mathcal{A}^*_\sigma$ la σ-algebra generata da $\mathcal{A}^*$, μ^* può essere esteso ad una σ-misura $\tilde{\mu}$ su $\mathcal{A}^*_\sigma$. Risulta $R_{\tilde{\mu}}$ chiuso (questo è un risultato valido per le σ-misure su σ-algebre, cfr. [9]) e da $R_{\mu*} \subset R_{\tilde{\mu}}$ segue che

$\overline{R}_{\mu^*} \subset R_{\tilde{\mu}}$. Viceversa se $a \subset R_{\tilde{\mu}}$ $\exists A \in \mathcal{A}_{\sigma}^{*}$ tale che $\tilde{\mu}(A) = a$. Ma $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ con $A_n \in \mathcal{A}^*$ opportune e disgiunte e quindi $a = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_n) =$ $= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) = \lim_n \sum_{k=1}^{m} \mu^*(A_k)$, cioé $\overline{R}_{\mu^*} = R_{\tilde{\mu}}$.

L'asserto ora segue dal fatto che $R_{\mu} = R_{\mu^*}$ cvd.

Osservazione (12.6) . In [10] si dà un'altra definizione di funzioni misurabili. Se μ è una misura sull'algebra $\mathcal{A}$ di parti di X, si definisce $\mu_e : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$ ponendo

$$\mu_e(A) = \inf\{\mu(B);\ B \supset A \quad \text{e} \quad B \in \mathcal{A}\}$$

e se $f_n, f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ si dice che $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$ se e solo se

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \lim_n \mu_e \{|f_n - f| > \varepsilon\} = 0 \,.$$

Se $S = S(X,\mathcal{A})$ è al solito l'insieme delle funzioni semplici, si dice che f è $(\mathcal{A},\mu)$-misurabile se e solo se $\exists \{s_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset S$ tale che $s_n \xrightarrow[\mu]{} f$.

Questa definizione è ben diversa da quella data precedentemente, in quanto qui interviene anche la misura μ ; è pertanto arduo legare in generale le due definizioni.

Riportiamo qui alcuni esempi tratti da [11], che illustrano la differenza delle due definizioni. Denoteremo con $\mathcal{M}_D$ l'insieme delle funzioni $(\mathcal{A},\mu)$-misurabili.

Esempio 1. Sia $\mathcal{A}$ l'algebra generata dagli intervalli contenuti in $[0,1]$. Le funzioni $\mathcal{A}$-misurabili sono tutte le funzioni $f : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ tali che i seguenti limiti esistono in $\mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to 1-} f(x) \,,\quad \lim_{x \to 0+} f(x) \,,\ \lim_{x \to y+} f(x),\ \lim_{x \to y-} f(x) \qquad \forall y \in \,]0,1[\,.$$

Se μ è la misura di Peano-Jordan su $\mathcal{A}$ una funzione f limitata è $(\mathcal{A},\mu)$-misurabile se e solo se è integrabile secondo Riemann.

Esempio 2.

Se $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{N} ; A \text{ finito o cofinito}\}$ ed $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ risulta

$$f \in \mathcal{M} \Longleftrightarrow \exists \lim_{n} f(n) \in \mathbb{R} .$$

Se $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$ è la misura definita da $\mu(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{2^n}$ per ogni $A \subseteq \mathbb{N}$, risulta $\mathcal{M}_D = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ cioé $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_D$.

Citiamo il seguente risultato (cfr. [11]).

Proposizione (12.10) Se μ è una misura sull'algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ risulta $\bar{\mathcal{A}} = \{H \subseteq X : \forall \varepsilon > 0 \ \exists A,B \in \mathcal{A} \text{ con } A \subset H \subset B \text{ e } \mu(B-A) < \varepsilon\}$ un'algebra contenente A.

Si ha

$$f : X \to \mathbb{R} \text{ è } (\mathcal{A},\mu) \text{ misurabile} \Longleftrightarrow f \text{ è } \bar{\mathcal{A}}\text{-misurabile e}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \mu_e \{ |f| > n \} = 0 .$$

BIBLIOGRAFIA

[1] R. SIKORSKI - *Boolean Algebras* (1969) Springer

[2] N. BOURBAKI -.*Topologie Générale* - Cap. 1 - Hermann

[3] B. PINI - *Primo corso di Analisi Matematica* - Coop. Libraria Univ. Bologna

[3]' " " *Secondo corso di Analisi Matematica* - Coop. Libraria Univ. Bologna

[4] G.F.SIMMONS- *Introduction to topology and modern Analysis*, Mac Graw -Hill (1963)

[5] RUSSEL C. WALKER - *The Stone - Čech Compactification* - Springer (1974)

[6] JOHN L.KELLEY - *General Topology* - Springer (1975)

[7] B.R.GELBAUM - J.M.H. OLMSTED - *Counterexamples in Analysis* - Holder Day (1966)

(esiste anche un'edizione italiana della Mursia)

[8] G.H.GRECO - *Sur la mesurabilità d'une fonction numérique par rapport à une famille d'ensembles* - Rend Sem. Mat. Univ. Padova 65 (1981)

[9] P.R. HALMOS - *On the set of values of a finite measure* Bull. A.M.S. 53 (1947) pag. 138-14).

[10] N.DUNFORD,J.T.SCHWARTZ - *Linear operators*, Parte 1, John Wiley, (1958).

[11] G.H.GRECO - *Completezza degli spazi L^p per misure finitamente additive* (in corso di stampa) (1982)