§ 2. IL PROBLEMA DI KEPLERO E DI NEWTON.

Continuando con fredda determinazione la destoricizzazione del linguaggio dell'esposizione storica, chiameremo "*problema dei due corpi Kepleriano*" il problema che effettivamente si posero Kepler e Newton posto però nella forma che si usa chiamare "*equazioni di Hamilton*" (che non sono dovute ad Hamilton bensì a Lagrange):

$$(5)\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{\partial H}{\partial p_r} & \dot{\theta} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\theta} \\ \dot{p}_r = -\dfrac{\partial H}{\partial r} & \dot{p}_\theta = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} \end{cases} \qquad H = H(r,\theta,p_r,p_\theta) = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) + \phi(r) \qquad \phi(r) = -\frac{1}{r}$$

Queste equazioni sono caratterizzate dall'esistenza di due *integrali primi indipendenti dal tempo, globali* cioè due funzioni $I(r,\theta,p_r,p_\theta)$, periodiche di periodo 2π in θ, tali che lungo le soluzioni I è costante: poichè $\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$, $p_\theta = J$ è *l'integrale primo del momento angolare o delle aree*, cioè la 2^a legge scoperta da Keplero (1609) nelle osservazioni planetari; poichè $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, $H(r,p_r,p_\theta) = E$ è *l'integrale primo dell'energia o delle forze vive* (pare scoperto da John Bernouilli, 1710).

La sola conoscenza di questi due integrali primi consente (naturalmente con l'uso di tecniche topologiche moderne) di comprendere la struttura qualitativa delle soluzioni di (5). Consideriamo infatti nello *spazio delle fasi* delle variabili $(x,y,\dot{x},\dot{y})$ (oppure in coordinate polari

$r, \theta, p_r = \dot{r}$, $p_\theta = r^2\dot{\theta}$) le superfici di livello definite dalle equazioni $p_\theta = J$, $H = E$.

Poichè $\text{grad}\, H = [\frac{1}{r^2} - \frac{J}{r^3}, 0, p_r, \frac{J}{r^2}]$, $\text{grad}\, p_\theta = [0,0,0,1]$ le due funzioni H e p_θ definiscono superfici di livello lisce (cioè senza singolarità e di dimensione 2) dove H è regolare, cioè per $r > 0$, e al di fuori dei punti in cui $\text{grad}\, H$ e $\text{grad}\, p_\theta$ sono dipendenti, cioè di $p_r = \dot{r} = 0$, $\frac{1}{r^2} - \frac{J}{r^3} = \ddot{r} = 0$. Perciò se si escludono le *collisioni* $(r = 0)$ e le *orbite circolari* $(\dot{r} = \ddot{r} = 0$ da cui $r =$ $=$ costante) le superfici di livello $T(E,J)$ sono lisce.

Ora di queste superfici $T(E,J)$ lisce alcune saranno compatte; altre conterranno nella loro aderenza $r = 0$ oppure saranno illimitate: chiamiamo *dominio di Delaunay* (+) nello spazio delle fasi *l'unione di tutte le superfici di livello* $T(E,J)$ *lisce e compatte*. L'immagine nel piano E,J del dominio di Delaunay sarà definita dalle disuguaglianze $J \neq 0$ (che esclude le collisioni poichè $J = r^2\dot{\theta}$) e dalle altre che assicurano la limitatezza: per trovarle basta ricavare dall'integrale dell'energia $p_r = \dot{r}$ (*"legge oraria"*) :

$$\dot{r}^2 = 2E + \frac{2}{r} - \frac{J}{r^2} = 2[E - V(r)] \tag{6}$$

e poichè il trinomio di 2° grado in $\frac{1}{r}$ a secondo membro deve essere positivo o nullo per avere $\dot{r}$ reale, le soluzioni saranno limitate per $1 + 2EJ^2 \geq 0$ (radici reali del trinomio) ed $E < 0$ (radici positive).

(+) ma bisognerebbe dire "di Keplero" visto che è il luogo di tutte le orbite ellittiche! .

Perciò l'immagine del dominio di Delaunay avrà equazioni

(7) $\qquad J \neq 0 \qquad E < 0 \qquad 1 + 2EJ^2 > 0$

escludendo le orbite circolari per le quali $1 + 2EJ^2 = 0$.

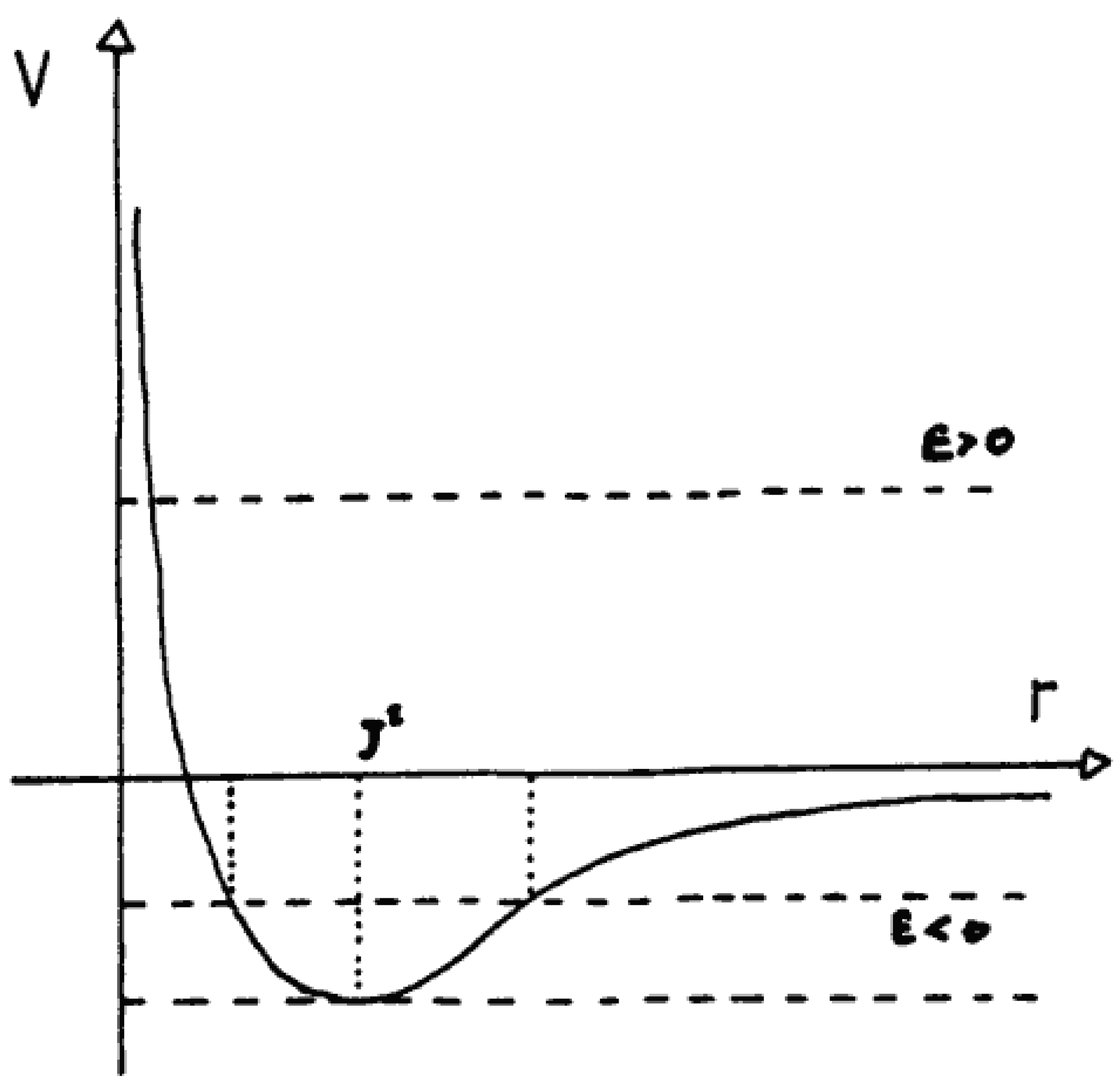


Fig.2:il potenziale effettivo: $V(r) = \dfrac{J^2}{2r^2} - \dfrac{1}{r} \leqslant E$

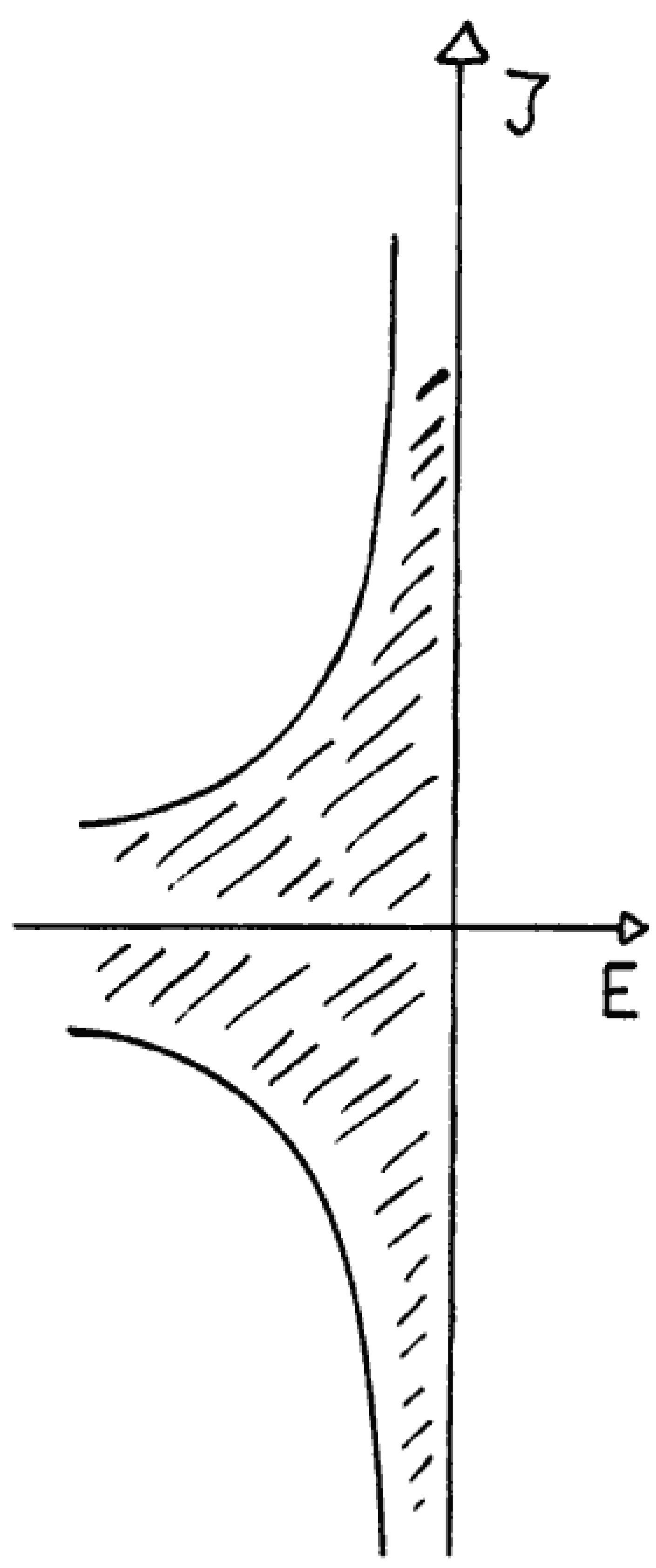
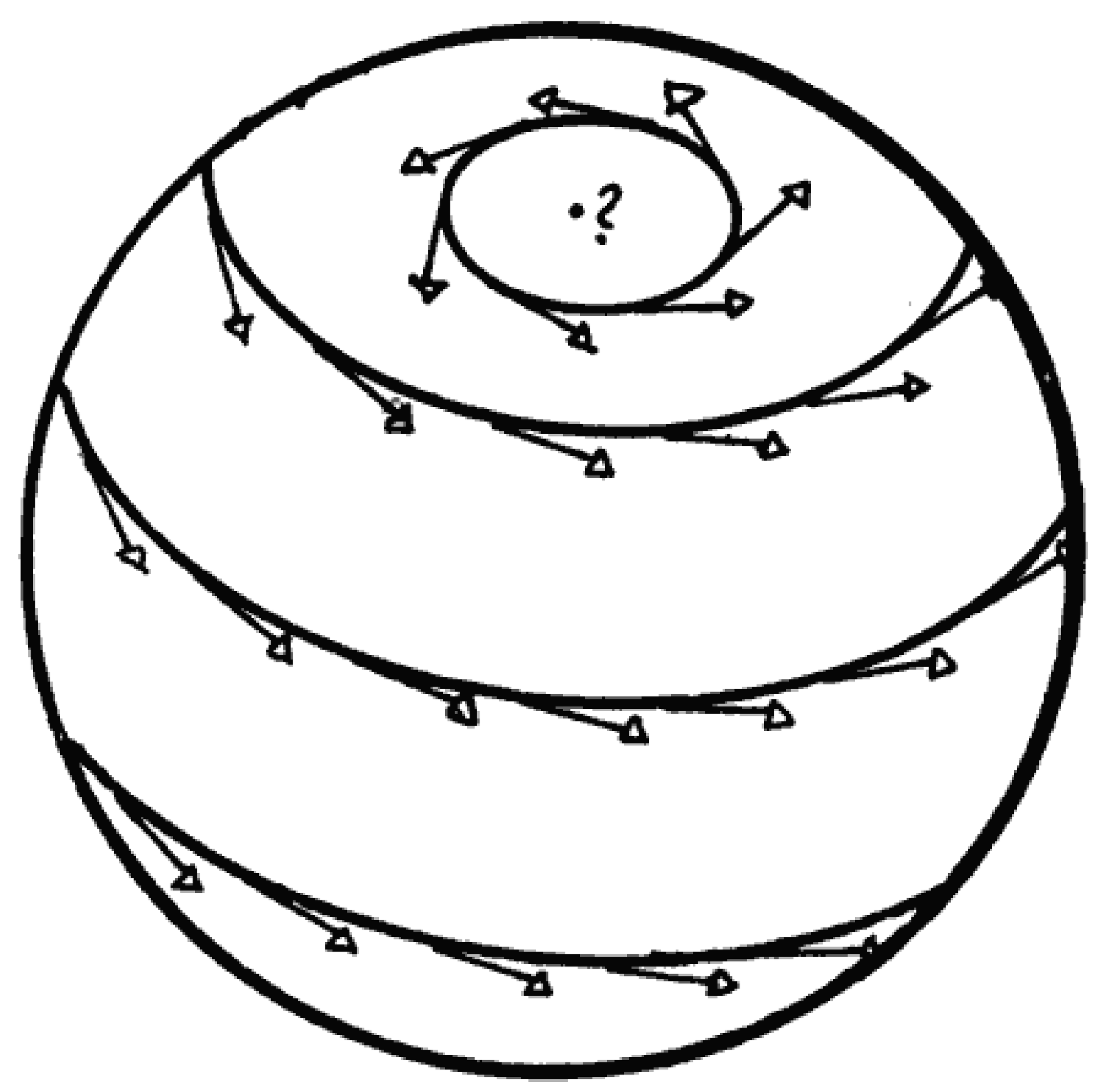


Fig.3 :immagine del dominio di Delaunay nel piano E,J.



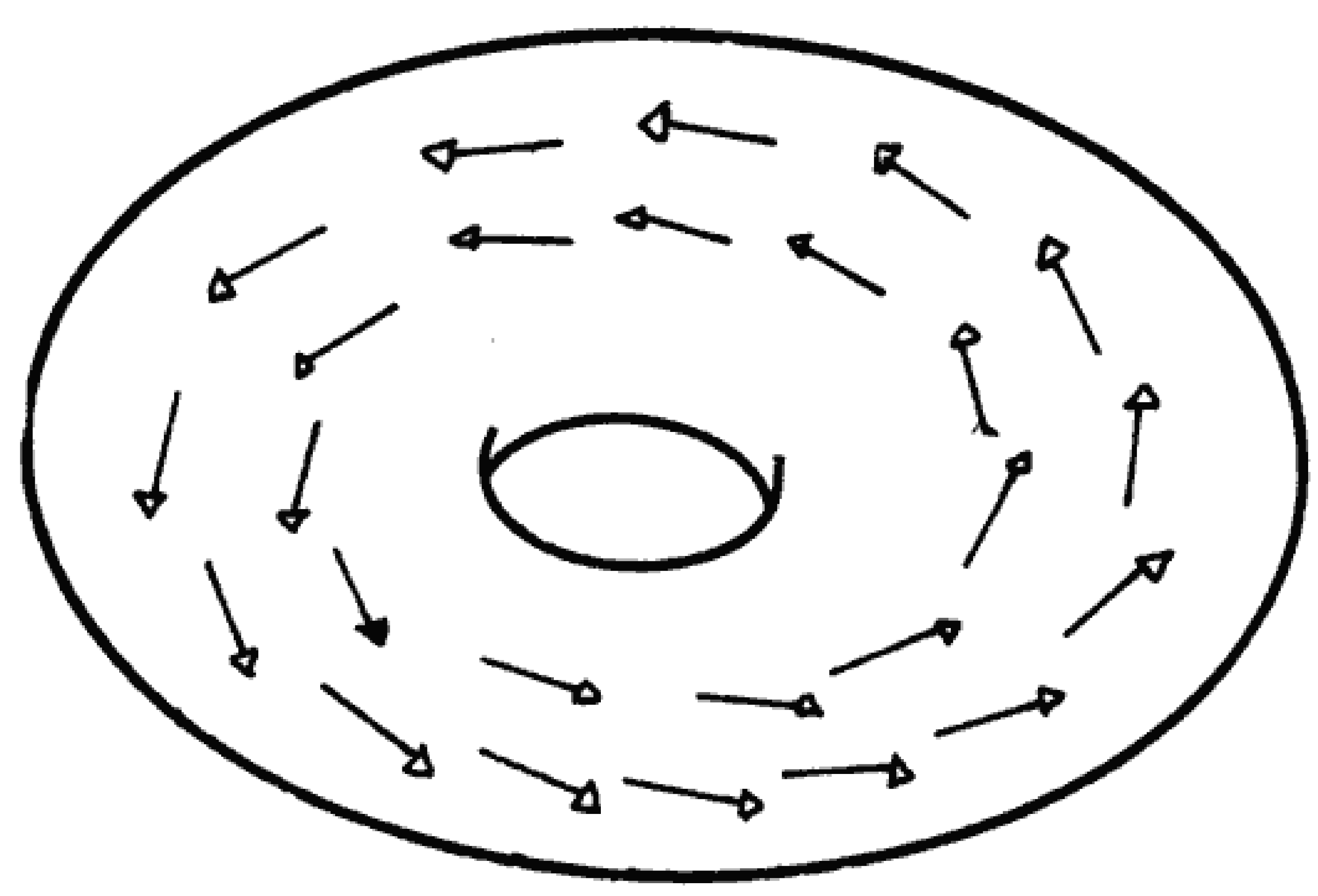


Fig.4 :si può "pettinare" solo il toro,tra tutte le superfici compatte senza bordo.

Si noti che le orbite circolari formano le "superfici" singolari (in realtà di dim 1) nell'aderenza del dominio di Delaunay.

Resta da decidere che tipo di superficie è $T(E,J)$ nel dominio di Delaunay, e che tipo di moto di svolge su di essa.

Alla prima domanda si risponde osservando che il campo vettoriale (5) è tangente a $T(E,J)$, poichè E,J sono costanti sulle soluzioni; inoltre tale campo vettoriale non si annulla mai. Perciò $T(E,J)$ *nel dominio di Delaunay è una superficie compatta con caratteristica di Eulero-Poincaré zero*, e quindi è *un toro* $S^1 \times S^1$. (l'unica superficie compatta che ammette un campo vettoriale mai nullo).

Perciò il moto su di un singolo toro potrà essere rappresentato da un sistema di due sole equazioni differenziali relative a due variabili angolari ϕ_1 , ϕ_2 : l'ipotesi più semplice che si possa fare su tali equazioni differenziali è che siano della forma

$$(8) \qquad \begin{cases} \dot{\phi}_1 = \omega_1 \ (E,J) \\ \dot{\phi}_2 = \omega_2 \ (E,J) \end{cases}$$

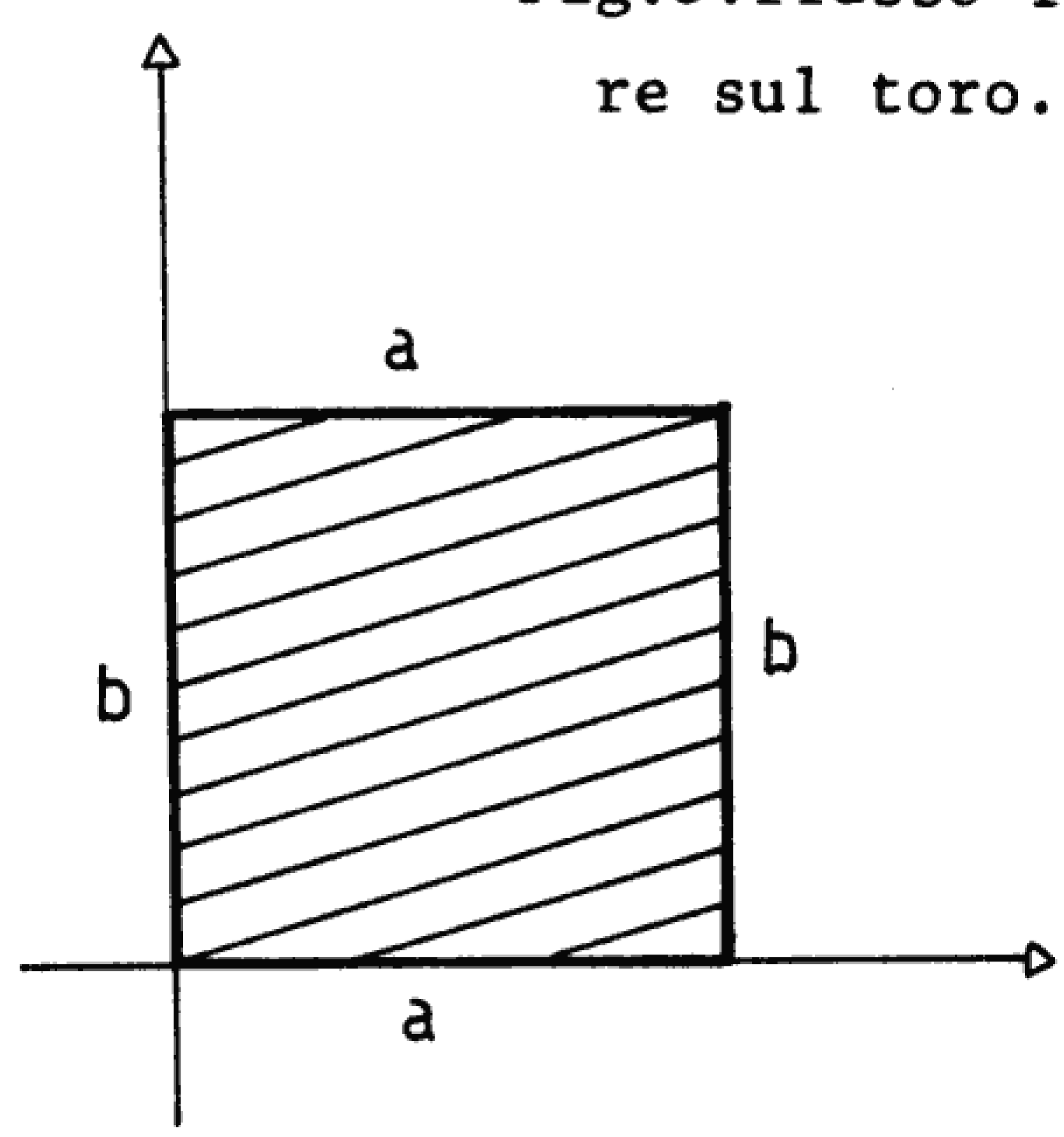


Fig.5:flusso lineare sul toro.

con ω_1 , ω_2 costanti su $T(E,J)$.

Ora le osservazioni di Keplero richiedevano che le soluzioni del problema dei 2 corpi fossero *periodiche* (1ª legge): perciò ω_1 ed ω_2 non possono essere arbitrari.

Infatti se il rapporto $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ ("*numero di rotazione*") è irrazionale, quando ϕ_1 aumenta di $\omega_1 t = 2\pi q$, q intero $\neq 0$, ϕ_2 aumenta di $\omega_2 t = 2\pi q \frac{\omega_2}{\omega_1}$ che non è mai un multiplo intero di 2π perchè ciò richiederebbe $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{p}{q}$ (p,q interi) . Perciò le curve integrali si avvolgono infinite volte sul toro senza mai ripassare dallo stesso punto (*caso ergodico*).

Se invece $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ è *razionale*, cioè $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{p}{q}$, allora le soluzioni ripassano dal punto di partenza dopo che è passato un tempo T tale che

$\omega_1 T = 2\pi q$, $\omega_2 T = 2\pi p$ cioè $T = \frac{2\pi p}{\omega_2} = \frac{2\pi q}{\omega_1}$ e quindi *tutte le soluzioni sono periodiche*. Perciò la 1ª legge di Keplero è verificata se e solo se si ha una relazione di *degenerazione*:

$$p\omega_1 - q\omega_2 = 0 \qquad p,q \in \mathbb{Z}, \ (p,q) \neq (0,0) \tag{9}$$

su ogni toro $T(E,J)$.

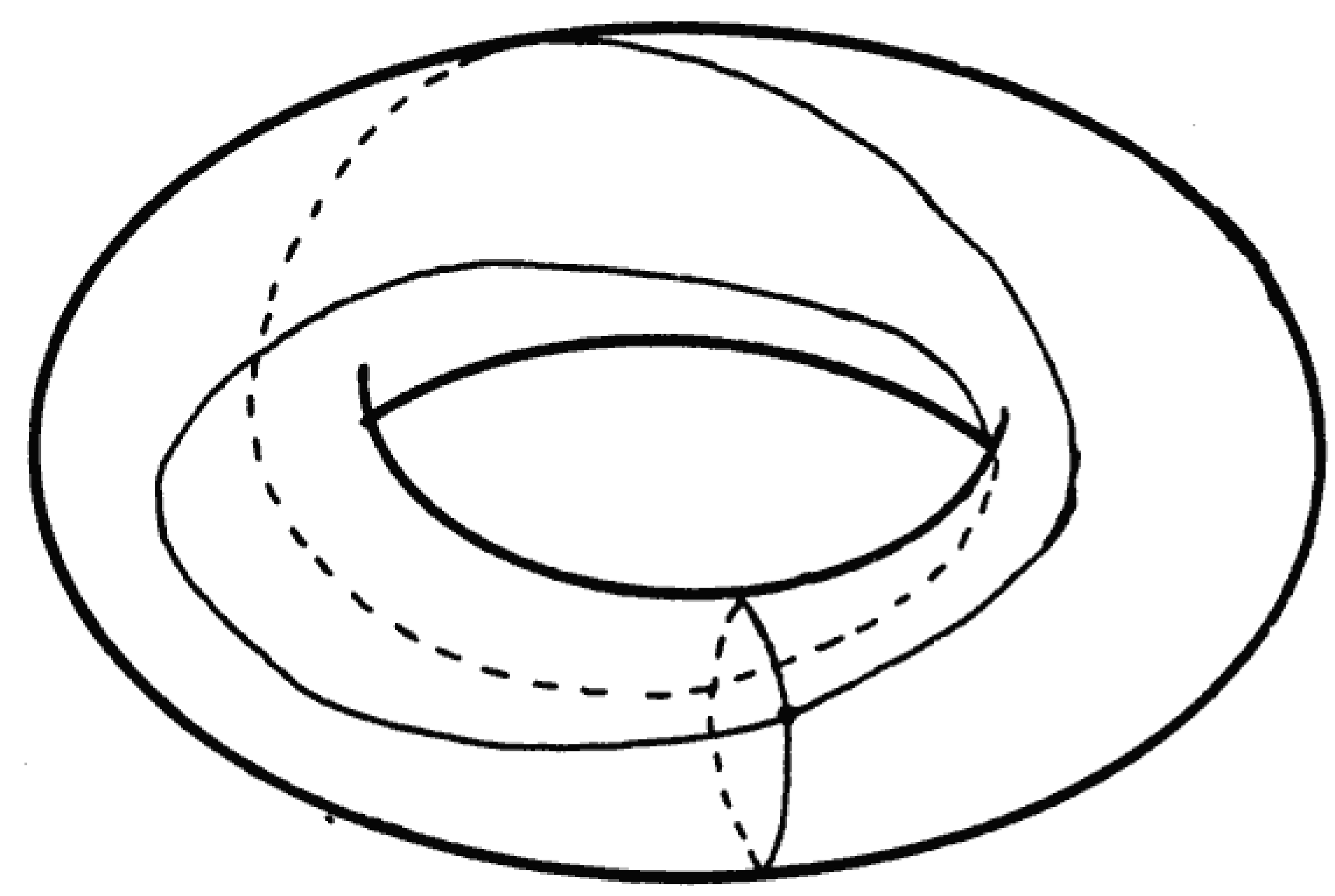


Fig.6 :degenerazione 2/1

Resta da stabilire perchè mai bisogna supporre che il campo vettoriale (5) ristretto al toro debba essere del tipo (8): in effetti non è necessariamente così, però se le variabili angolo ϕ_1, ϕ_2 sono scelte in modo opportuno ci si può effettivamente ricondurre a questo caso. Questo è stato scoperto da Liouville (1849) (che dà un enunciato locale; per l'enunciato globale, Arnold (1963)), con metodi di cui parleremo nel prossimo paragrafo.

Bibliografia:

A. Wintner "*The analytical foundations of celestial mechanics*" Princeton 1941.