0. - INTRODUZIONE.

0.1. Si consideri 10 l'insieme dei numeri reali R e un insieme arbitr rio X, in genera e in nito, che sarà poi l'insieme sui cui sottoins emi sono definite e mi ure che considereremo. La superstruttura V di base X e $\mathbb{R}$ è la collezione degli insiemi che si possono formare da X e $\mathbb{R}$ con un numero finito di applicazioni dell'operazione insiemistica di potenza: $\mathcal{P}(Y)$ = insieme delle parti di Y. In realtà V stesso è un insieme; sono elementi di V i sottoinsiemi di X, i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, collezioni finite di sottinsiemi, funzioni da X a $\mathbb{R}$, insiemi di tali funzioni etc. etc... . Inoltre V è chiuso rispetto alle operazioni di unione e di intersezione finite, prodotto cartesiano finito...; insomma V è proprio la collezione di insiemi dentro la quale possiamo trovare tutti gli oggetti matematici standard che adopereremo in tale seminario. Per ragioni tecniche si suppone X e R disgiunti e ogni individuo $X \in X \cup R$ non avente elementi in comune con V.

Si considerino de gli i siemi $^*X, ^*\mathbb{R}$ tali che $^*X \supsetneq X$ $^*\mathbb{R} \supsetneq \mathbb{R}$: la superstruttura V' sopra $^*X$ e $^*\mathbb{R}$ è definita in modo analogo. Ci interessano quelle V' per cui es ste una funzione $* : V \to V'$ soddisfacente i seguenti assiomi:

1) $*$ è l'identi à sug i ind vidui, cioé sugli elementi di $X \cup \mathbb{R}$.
2) $*$ è una e-i mersi ne. C oé $A \in B \Longleftrightarrow {}^*A \in {}^*B$ o anche
   $^*\mathcal{A} \supseteq \{^*A : A \in \mathcal{A}\}$ (se $A \subset X \cup \mathbb{R} \Longrightarrow {}^*A \supseteq A$)
3) $*$ non può es ere l indentità. Per tutti gli $\mathcal{A}$ infiniti
   $^*\mathcal{A} \supsetneq \{^*A : A \in \mathcal{A}\}$
4) Il Principio i Tra sfer (abbr. PT).

Quest'ultimo afferm che e $\phi(v_1,\dots v_n)$ è una proprietà espressa da una formula del primo o dine imitata, allora:

$$\phi(x_1,x_2,\dots x_n) \text{ vale in } V \Leftrightarrow \phi({}^*x_1,{}^*x_2,\dots {}^*x_n) \text{ vale in } V'.$$

La formula ϕ è una delle formule che si possono costruire dalle formule basilari del tipo $v \in u$, $v = u$, con un numero finito di passi adoperando congiunzioni $\wedge$, disgiunzioni $\vee$, implicazioni $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ e infine i quantificatori limitati; per questi ultimi si intende che davanti ad una formula si può scrivere $(\exists v \in x) \dots$ o $(\forall v \in x) \dots$ con x costante o variabile. Daremo più avanti esempi di come si applica tale principio. Superstrutture V' e applicazioni $*$ che godono le proprietà elencate esistono e si possono "costruire" in vari modi facendo uso però in tutti dell'assioma di scelta o al massimo di qualche assioma solo un po' più debole di esso (vedi [1][2][7]).

0.2. Descrizione di ${}^*\mathbb{R}$. Siccome $\mathbb{R}$ è un campo ordinato, anche ${}^*\mathbb{R}$ lo è, per il PT. Tuttavia ${}^*\mathbb{R}$ non è (e non può essere poiché ${}^*\mathbb{R} \supsetneq \mathbb{R}$) archimedeo.

Tale proprietà infatti, non si esprime mediante una formula a cui si può applicare il PT.

Ci sono alcuni sottoinsiemi di ${}^*\mathbb{R}$ limitati superiormente che non ammettono sup. Quali siano gli insiemi limitati per cui esistono gli estremi verrà chiarito nel punto 0.4. Piuttosto qui diamo delle proprietà algebriche di ${}^*\mathbb{R}$ che si trasmettono da $\mathbb{R}$.

Indichiamo con:

$$\mathcal{O}({}^*\mathbb{R}) = \{x : x \in {}^*\mathbb{R} \ \ \& \ \ |x| < n \quad \text{per qualche} \quad n \in \mathbb{N}\}$$

$$o({}^*\mathbb{R}) = \{x : x \in {}^*\mathbb{R} \ \ \& \ \ |x| < \frac{1}{n+1} \quad \text{per ogni} \quad n \in \mathbb{N}\}$$

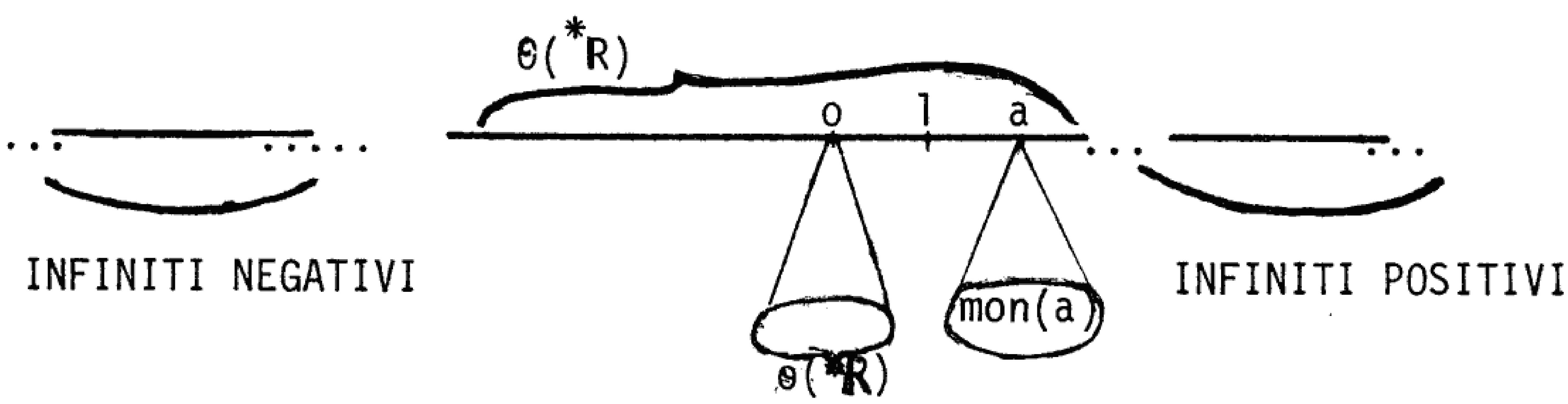
$\mathcal{O}({}^*\mathbb{R})$, insieme degli elementi <u>finiti</u>, è un anello ordinato.

$o({}^*\mathbb{R})$, insieme degli <u>infinitesimi</u>, è un ideale massimale in tale anello.

Inoltre $\Theta({}^*R)_{/\theta({}^*R)} \sim R$. L'omomorfismo canonico $st : \Theta({}^*R) \to R$ è molto importante per ciò che segue; esso per ogni x finito "sceglie" il numero reale che "più si avvicina" ad x. In altri termini, da $a = st(x)$ segue che $a - x$ è infinitesimo; si scrive anche $a \approx x$. Ogni $a \in R$ si trova allora in una ed una sola classe laterale $a + \theta({}^*R)$; essa viene chiamata monade di a ($mon(a)$).

Gli elementi di ${}^*R - \Theta({}^*R)$ sono chiamati <u>infiniti</u>.

Il seguente disegno può illustrare meglio quanto detto.



0.3. <u>Descrizione di ${}^*N$</u>. Per il PT, anche qui molte proprietà si trasferiscono da N a ${}^*N$. Questo è quello che si dice un modello dell'aritmetica peaniana al I° ordine. Non tutti i sottoinsiemi (non vuoti) di ${}^*N$ ammettono minimo, altrimenti ${}^*N$ coinciderebbe con N.

Esempio:

${}^*N \setminus N$ non può ammettere minimo. Se a fosse minimo di tale insieme, seguirebbe $a \neq o$, per cui $a - 1 \in {}^*N$ cosicché $(a-1)+1 \in N$, il che è assurdo.

Tuttavia certi sottoinsiemi descritti nel punto 0.4 lo ammettono. N è un segmento iniziale di ${}^*N$.

Per $n \in N$ vale la formula $(\forall x_o \in N)\dots(\forall x_n \in N)\left[\bigwedge_{i=o}^{n} x_i < n \to \bigvee_{i<j} x_i = x_j\right]$;

a plicando allora il PT si ha che vale

$$(\forall x_0 \in {}^*\mathbb{N}) \ldots (\forall x_n \in {}^*\mathbb{N}) \left[\bigwedge_{i=1}^{n} x_i < n \rightarrow \bigvee_{i<j} x_i = x_j \right] .$$

I oltre ${}^*\mathbb{N}$ è cofinale con ${}^*\mathbb{R}$; basta applicare il transfer alla formula

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{N})(x \leq y) .$$

Ciò ci dice che ${}^*\mathbb{R}$ non è archimedeo, bensì ${}^*\mathbb{N}$-archimedeo.

0.4. Gli insiemi interni. La $*$ si applica a tutti gli elementi di $\mathbb{V}$.

Se $\mathcal{F}$ è una collezione di insiemi infinita ed $\mathcal{F} \in W$ allora ${}^*\mathcal{F} \supsetneq \{{}^*A : A \in \mathcal{F}\}$.

Gli elementi di ${}^*\mathcal{F}$ sono detti interni, mentre gli elementi che sono immagini secondo $*$ sono detti standard. I sottoinsiemi interni di un dato insieme Y sono gli elementi di ${}^*\mathcal{P}(Y)$. Quest'ultimo insieme è un'algebra di Boole, e se Y è infinito ${}^*\mathcal{P}(Y) \subsetneq \mathcal{P}({}^*Y)$.

Inoltre $* : \mathcal{P}(Y) \rightarrow {}^*\mathcal{P}(Y)$ è un monomorfismo booleano. Per il Principio di Transfer valgono infatti le:

$${}^*(A \cup B) = {}^*A \cup {}^*B \quad , \quad {}^*(A \cap B) = {}^*A \cap {}^*B$$

$${}^*(A - B) = {}^*A \setminus {}^*B \quad , \quad {}^*\emptyset = \emptyset$$

Inoltre, se $f : A \rightarrow B$, segue ${}^*f : {}^*A \rightarrow {}^*B$; se $H(x,y)$ è una relazione ${}^*(\text{Dom } H) = \text{Dom } {}^*H$ ${}^*(\text{Rango } H) = \text{Rango } {}^*H$.

Ci sono alcuni insiemi nella superstruttura V', i quali non solo non stanno nell'immagine di $*$ (cioè sono standard), ma che non sono nemmeno interni (esempio: $\mathbb{N}$, ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ etc...).

Siamo interessati a considerare la collezione degli insiemi V' che sono ins emi interni. Questa collezione si chiama Ampliamento Non-standard di V. Gli insiemi interni sono importanti come dimostrano le proposizioni seguenti.

_ roposizione 1 : I sottoinsiemi non vuoti e interni di ${}^*\mathbb{N}$ ammettono minimo.

roposizione 2 : I sottoinsiemi non vuoti di ${}^*\mathbb{R}$ interni e limitati super· ormente ammettono sup.

imostrazione di 1 (2 è simile) : Un sottoinsieme A di ${}^*\mathbb{N}$ è un elemento di ${}^*\mathcal{P}(N)$. Allora si applichi il PT alla formula:

$$(\forall A \in \mathcal{P}(N)) \, [A \neq \emptyset \rightarrow (\exists y \in A)(\forall z \in A)(y \leq z)] \ .$$

0.5. Gli insiemi * -finiti. Dato un insieme Y, hanno particolare importanza i sottoinsiemi interni di ${}^*Y$ che si possono mettere in corrispondenza biunivcca mediante una funzione interna, con un segmento di ${}^*\mathbb{N}$. Essi sono detti * - initi. Si possono ovviamente descrivere anche nella seguente maniera. Sia $\mathcal{P}_f$ Y) l'insieme dei sottoinsiemi finiti di Y. Ogni insieme *-finito appartie e a ${}^*\mathcal{P}_f(Y)$. La funzione $|| \ ||: \mathcal{P}_f(Y) \rightarrow N$ che associa ad ogni elemento l. sua cardinalità si estende ad una funzione, sempre denotata $|| \ || : {}^*\mathcal{P}_f(Y) \rightarrow {}^*N$.

Con il PT si possono dimostrare le seguenti

Proposizione 3 : Ogni sottoinsieme interno di un insieme * finito è *-finito.

Froposizione 4 : S: A, B sono * finiti e $A \subseteq B$ allora $||A|| \leq ||B||$.

0.6. Allargamenti - Fra gli ampliamenti non standard di V ci interessano quelli detti ALLARGAMENTI, che godono una ulteriore proprietà. Essi sono definiti mediante una delle condizioni equivalenti date dalla proposizione 5 che segue. Una relazione $H(x,y)$ appartenente a V si dice concorrente se

$$\forall x_1, \forall x_2 \ldots \forall x_n \, \exists y \quad H(x_1,y) \,\&\, H(x_2,y) \ldots \&\, H(x_n,y) \,.$$

Si dice che essa è saturata nell'ampliamento non standard se esiste un $v \in {}^*(\text{Rango } H)$ tale che vale

$${}^*H({}^*x,v) \quad \text{per ogni} \quad x \in (\text{Dom } H)$$

Esempio: Sia $\mathfrak{F}$ un filtro proprio e $H(A,B)$ definita da

$$A \in \mathfrak{F} \quad \& \quad B \in \mathfrak{F} \qquad \& \quad A \supseteq B$$

Manifestamente, H è concorrente. Che H sia saturata vuol dire che esiste un $D \in {}^*\mathfrak{F}$ tale che ${}^*H({}^*A,D)$ per ogni $A \in \mathfrak{F}$. Ciò vuol dire che, in particolare $\bigcap \{{}^*A : A \in \mathfrak{F}\} \neq \emptyset$. Quest'ultima proprietà richiesta per tutti i filtri propri è un'altra proprietà che caratterizza gli allargamenti.

Proposizione 5 : Per un ampliamento non-standardsono equivalenti:

(i) Per ogni insieme Y esiste un insieme $*$-finito F tale che ${}^{\sigma}Y \subseteq F \subseteq {}^*Y$, dove ${}^{\sigma}Y = \{{}^*y : y \in Y\}$.

(ii) Ogni filtro $\mathfrak{F}$ è tale che $\bigcap\{{}^*A : A \in \mathfrak{F}\} \neq \emptyset$.

(iii) Ogni relazione H concorrente è saturata (ovviamente, $Y, \mathfrak{F}, H$) sono elementi di V).

Osservazione: La proprietà (i) è quella che, come si dice in gergo, permette di approssimare gli insiemi infiniti dal di sopra.

Essa è soprattutto utile in aree dove i problemi sono di natura discreta, ma i metcdi sono continui perché può ridurre certe dimostrazioni a dimostrazioni puram 1te combinatorie (vedi parte II 2.1, prop. 6, e [10], [13], [32] § 7).