

Nel piano xt , scelto un istante t , la lunghezza del segmento coincide con la differenza fra le ascisse degli estremi (figura 3).

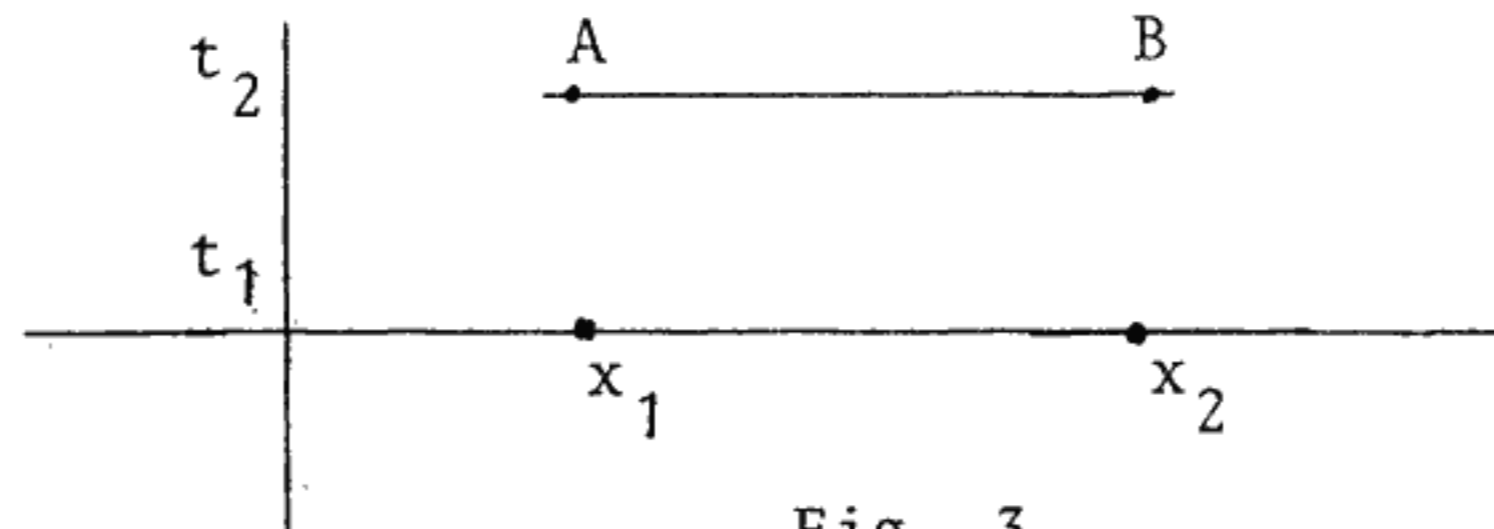


Fig. 3

La misura di un intervallo temporale è la differenza fra le ascisse temporali di due eventi che avvengono *nello stesso punto* dello spazio. Un intervallo temporale fra due eventi che avvengono nello stesso punto viene detto *intervallo di tempo proprio o di riposo*.

Così l'intervallo temporale che intercorre fra la sovrapposizione di A' e A e di B' e A è un intervallo di tempo proprio per l'osservatore K (entrambi gli eventi avvengono nel punto A e K ⁽⁷⁾). Analogamente l'intervallo temporale che intercorre fra la sovrapposizione di A' ed A e di A' e B , è proprio in K' .

Conviene usare la stessa terminologia anche per i segmenti. La lunghezza propria o di riposo (o di quiete) di un segmento è la lunghezza vista dall'osservatore per il quale il segmento è in quiete.

8. UNITA' DI MISURA DELLE LUNGHEZZE.

Siano ancora K e K' due riferimenti inerziali e si scelgano, come nei numeri precedenti, ⁽⁷⁾ $AB \in K$, $A'B' \in K'$ con $\text{vers } AB = - \text{vers } A'B'$ (fig.2).

Definizione. I segmenti $AB \in K$ e $A'B' \in K'$ hanno lunghezze di riposo uguali se (indicando con $AB|_K$ la misura di AB fatta dall'osservatore K ecc.) risulta

$$\frac{AB|_K}{A'B'|_K} = \frac{A'B'|_{K'}}{AB|_{K'}}$$

(7) Nel seguito per indicare che un punto A , un segmento AB , ecc. sono in quiete rispetto a un riferimento K , si useranno talora le notazioni: $A \in K$, $AB \in K$ ecc. .

In altri termini i due segmenti hanno la stessa lunghezza di riposo se il rapporto fra la misura del segmento visto in quiete e la misura del segmento visto in moto, è la stessa per entrambi gli osservatori.

E' evidente che in questa definizione i due riferimenti sono trattati in modo simmetrico.

L'esistenza di segmenti aventi uguali lunghezze di riposo è basata su due sole premesse.

1) La stessa relazione di uguaglianza o di disuguaglianza intercorre per tutti gli osservatori fra due segmenti in quiete nello stesso riferimento.

Per es. se $A'B' \in K'$, $C'D' \in K'$ e $\frac{A'B'|_{K'}}{C'D'|_{K'}} \geq 1$, è anche rispettivamente

$$\frac{A'B'|_K}{C'D'|_K} \geq 1 .$$

Questa proprietà è conseguenza dell'omogeneità spazio-temporale dei riferimenti inerziali.

2) In tutti i riferimenti inerziali si accetta il postulato (di Dedekind) della continuità della retta.

Per riconoscere che esistono segmenti aventi lunghezze di riposo uguali, si considerino i due segmenti $AB \in K$, $A'B' \in K'$ tali che:

$$\frac{A'B'|_K}{AB|_K} = 1 .$$

Come si è visto al n.6 si ha allora:

$$\frac{AB|_{K'}}{A'B'|_{K'}} < 1 .$$

Lasciando AB fisso si considerino segmenti $A'B'$ di lunghezza de-

crescente (per entrambi gli osservatori: premessa 1)). La frazione:

$$\frac{A'B'|_K}{A B|_K}$$

decrebbe allora da 1 verso 0, mentre la frazione:

$$\frac{A B|_{K'}}{A'B'|_{K'}}$$

cresce verso 1. In base alla premessa 2) esiste un segmento A'B' tale che:

$$\frac{A'B'|_K}{A B|_K} = \frac{A B|_{K'}}{A'B'|_{K'}}$$

Naturalmente questo risultato è indipendente dalle unità di misura usate dai due osservatori.

Il procedimento illustrato mostra pure che ogni segmento AB \in K ammette un segmento A'B' \in K' avente la stessa lunghezza di riposo e viceversa. Si torni al caso in cui AB e A'B' abbiano la stessa lunghezza per l'osservatore K.

$$(3) \quad \frac{A'B'|_K}{A B|_K} = 1$$

Risulta allora:

$$(4) \quad \frac{A' B'|_{K'}}{A B|_{K'}} = \gamma^2 > 1$$

La quantità γ non dipende né dalla direzione del moto relativo di K e K' (per l'isotropia degli spazi inerziali), né dalla posizione di AB, A'B' nei rispettivi spazi (per l'omogeneità e l'isotropia degli spazi inerziali), né dai tempi (in K e K') in cui i segmenti transitano uno su l'altro (per l'omogeneità dei tempi dei riferimenti inerziali).

ziali). Si assumerà che γ sia funzione solo del modulo della velocità \vec{v} .

Se l'osservatore K vede invece i due segmenti disuguali:

$$(5) \quad \frac{A'B'|_K}{AB|_K} = \alpha \neq 1$$

l'osservatore K' vede i due segmenti nel rapporto:

$$(6) \quad \frac{A'B'|_{K'}}{AB|_{K'}} = \alpha\gamma^2.$$

Per es. se $\alpha = 2$, basta prendere i due segmenti AM e MB, dove M è il punto di mezzo del segmento AB e applicare le relazioni (3),(4) ai segmenti AM, A'B' e MB, A'B'.

Si supponga ora che AB e A'B' abbiano lunghezze di riposo uguali. Allora essi certamente non sono uguali né per l'osservatore K (nel qual caso sarebbe vera la(4) e quindi non potrebbe essere vera la (2) né per l'osservatore K' (per motivo analogo).

Il valore di α per segmenti aventi la stessa lunghezza di riposo si desume dalle (2),(5),(6):

$$\alpha = \frac{1}{\alpha\gamma^2}$$

cioè

$$\alpha = \frac{1}{\gamma}$$

Le (5) e (6) si scrivono allora:

$$AB|_K = \gamma A'B'|_K$$

$$A'B'|_{K'} = \gamma AB|_{K'}$$

Poiché $\gamma > 1$, ognuno dei due osservatori vede il segmento in moto più corto del segmento in quiete di un fattore γ .

Più esplicitamente, per ognuno dei due osservatori, di due segmenti aventi lunghezze di riposo uguali, quello in moto è più corto di un fattore γ .

Va notata la perfetta simmetria con la quale sono trattati K e K' . La convenzione adottata permette di pervenire ad un confronto fra le misure di uno stesso segmento effettuate dai due osservatori. Infatti se AB e $A'B'$ sono due segmenti aventi lunghezze di riposo uguali e se K e K' li adottano come rispettive unità di misura delle lunghezze i due osservatori servendosi del risultato precedente, hanno a disposizione una effettiva convenzione per il confronto quantitativo delle medesime (il valore numerico di γ sarà determinato al n.10).

Una volta stabilita la relazione fra le unità di misura, la stessa relazione sussiste fra le misure di uno stesso segmento effettuate dai due osservatori. Così ogni segmento appartenente a K avrà in K' lunghezza γ volte più piccola di quella vista da K e viceversa.

A titolo di esempio si consideri ancora il caso (3). Per K i due segmenti $A'B'$ e AB sono uguali. Per K' , i segmenti $A'B'$ e AB sono rispettivamente γ volte più lungo e γ volte più corto e quindi è chiaro che il rapporto delle loro misure è γ^2 .

Infine è opportuno mettere in evidenza che dire che due segmenti hanno lunghezze di riposo uguali equivale a dire che sussiste la relazione:

$$(7) \quad AB|_K = A'B'|_{K'}$$

In particolare se questi segmenti sono le rispettive unità di misura di K e K' , ognuno di essi ha lunghezza unitaria nel proprio riferimento di quiete.