CAPITOLO 20

Flock ovali e gruppi 2-transitivi

In questo capitolo consideriamo i flock di un cono che possono essere costruiti a partire da un'ovale in $PG(3, q)$.

DEFINIZIONE 20.1. *(1) Sia O un'ovale in PG(2,K),K campo, e sia P un punto che non é in O. Si consideri il cono C avente per generatrici le rette PQ, dove Q é un punto di O. Chiameremo il punto P il vertice di C. Un'ovale di traslazione é un'ovale O per cui esiste un gruppo di traslazioni T del piano che contiene O che fissa il punto $(\infty) = C \cap ($ l'asse di traslazione) e agisce transitivamente su $C - (\infty)$.*

(2) Un flock ovale é un insieme di piani $\{\pi_\alpha \mid \alpha \in \lambda\}$ dove $\cup \pi_\alpha = C -\ P$ e i $\pi_\alpha \cap C$ hanno due a due intersezione identica.

Naturalmente, per $K = GF(q)$ e q dispari, un'ovale in un piano Desarguesiano é una conica (il risultato é di Segre).
Per q pari tutte gli ovali di traslazione in un piano Desarguesiano possono essere rappresentate nella forma $\{(1, t, t^\sigma),\ (0, 0, 1) \mid t \in GF(q = 2^r)\}$ dove per $\sigma = 2^s$ allora $(s, r) = 1$ (il risultato é di Payne).
Jha e Johnson hanno trovato una classe di flock ovali di traslazione in cui l' ovale non é una conica. Cioé, l'ovale in questione é un'ovale di traslazione. Questo flock ammette un gruppo di automorfismi che agisce due transitivamente sui piani del flock. Recentemente, é stato notato che tali flock coincidono con quelli trovati da D. Fisher e J.A. Thas (si veda D. Fisher e J.A. Thas, Flocks in $PG(3, q)$. Math. Zeit. 169 (l979) 1-11).

TEOREMA 20.2. (Fisher e Thas, si veda anche Jha-Johnson [**56**]).

Sia q pari, q $\equiv -1 \bmod 3$, e sia σ un automorfismo di $GF(q)$. Rappresentiamo un'ovale di traslazione nella forma $\{(1, t, t^\sigma), (0, 0, 1) \mid t \in GF(q)\}$. Siano coordinate omogenee per $PG(3, q)$, (x_o, x_1, x_2, x_3) con $x_i \in GF(q)$ per $i = 0, 1, 2, 3$.

Si consideri l'ovale nel piano $x_3 = 0$ e prenda il cono di traslazione usando (0,0,0,1) come vertice.

Allora, il seguente insieme di piani é un flock ovale.

$\pi_s \colon s^{\sigma+1}\mathbf{x}_o + s^{\sigma}\mathbf{x}_1 + s\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 = 0$ al variare di $s \in GF(q)$.

Inoltre, questo flock ammette un gruppo di automorfismi che agisce due transitivamente sui piani del flock. Il gruppo é ST, dove

$$S = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & s & s^{\sigma} & s^{\sigma+1} \\ 0 & 1 & 0 & s^{\sigma} \\ 0 & 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid s \in GF(q) \right\rangle$$

$$T = \left\langle \begin{bmatrix} t^{\sigma+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^{\sigma-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^{1-\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^{-1-\sigma} \end{bmatrix} \mid t \in GF(q) \right\rangle.$$

Dim: Supponiamo che il siffatto insieme di piani ammetta il gruppo ST. Allora, abbiamo un flock se e soltanto se l'intersezione $\pi_1 \cap \pi_o \cap$(il cono) é banale. Questo equivale a mostrare che $\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2+\mathrm{x}_3 = 0$ non é possibile per i punti (x_1, x_2, x_3) del cono. Le rette del cono sono

$$L_\infty = \langle (0,0,1,0), (0,0,0,1) \rangle, L_t = \langle (1,t,t^{\sigma},0), (0,0,0,1) \rangle.$$

Nel primo caso, un'intersezione con L_∞ darebbe $x_1 = x_2 = 0$ e quindi $x_3 = 0$.
Nel secondo caso, un'intersezione con L_t implicherebbe $\beta(1 + t + t^{\sigma}) = 0$ per ogni $\beta \in GF(q)$. Quindi, la traccia $(1 + t + t^{\sigma}) = 0 =$ traccia(1). Ma quando $q \equiv -1 \bmod 3$ questo non é possibile.

Definizione 20.3. *Un flock come quello dato in (20.2) si chiama un flock ovale di traslazione di Thas.*

Questo flock corrisponde a un $(q + 1)$-arco in $PG(3, q)$. Allora, si puó prendere $C(\sigma) = \{(1, t, t^{\sigma}, t^{\sigma+1}), (0, 0, 0, 1) \mid t \in GF(q)\}$ per $\sigma = 2^s$, q = 2^r dove $(r, s) = 1$ come un $(q + 1)$-arco. Il piano in $PG(3, q)$ che é tangente a

$(1, t, t^{\sigma}, t^{\sigma+1})$ é $t^{\sigma+1}\mathrm{x}_o + t^{\sigma}\mathrm{x}_1 + t\mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3 = 0$ (per esempio, si veda Lüneburg [**112**](44.3)). Il piano tangente a (0,0,0,1) é ($\mathrm{x}_o = 0$).

Teorema 20.4. (Jha-Johnson [**56**]).

Sia C un (q+1)-arco in PG(3,q), per q pari e q$\equiv -1$ mod 3. Allora, esiste esattamente una polarità simplettica β tale che per un punto fissato di C, Q_o, i piani $\{P^{\beta} \mid \mathbf{P} \in C - \{Q_o\}\}$ formano un flock ovale di traslazione di Thas.

Dim: Si noti che nelle rappresentazione date sopra, la polarità può essere definita dalle funzione g tale che $\mathrm{g}(\mathrm{x}_0,\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3,\mathrm{y}_o,\mathrm{y}_1,\mathrm{y}_2,\mathrm{y}_3) = \mathrm{x}_0\mathrm{y}_3 + \mathrm{x}_3\mathrm{y}_0 + \mathrm{x}_1\mathrm{y}_2 + \mathrm{x}_2\mathrm{y}_1$. Inoltre, $SL(2, q)$ agisce sul $(q+1)$-arco come un prodotto tensoriale $G = SL(2, q) \otimes SL(2, q)^{\sigma}$, dove la notazione indica la rappresentazione normale e la rappresentazione sghemba usando l'automorfismo σ. Il gruppo che agisce sul flock ovale di traslazione é un sottogruppo di ordine $q(q-1)$ di G.

Con (20.4), é possibile determinare tutti i flock isomorfi.

Teorema 20.5. (Jha-Johnson [**56**]).

In PG(3,2^r),r dispari, ci sono esattamente ϕ(r)/2 flock ovali di traslazione di Thas non sono isomorfi dove ϕ é la funzione di Eulero.

Inoltre, per tali flock vale che non esistono quattro piani del flock aventi un punto in comune.

Recentemente, Thas ha dimostrato il seguente teorema:

Teorema 20.6. (Thas [**139**]).

Sia F un flock conico in PG(3,q) per q ≥ 4. Se (a) q é pari o (b) q é dispari, con $q > 83$ o $q < 17$ o $q = 27$ o $q = 81$, allora, F é il flock di Fisher-Thas-Walker se e soltanto se non ci sono quattro piani del flock che hanno un punto in comune.

La dimostrazione di Thas usa la teoria della cubica sghemba. É possibile, quindi, provare il seguente teorema.

Teorema 20.7. (Jha - Johnson [**56**]).

Sia F un flock ovale in PG(3,2^r) tale che non ci sono quattro piani di F che hanno un punto in comune. Allora, F é un flock ovale di traslazione di Thas.

Quando l'ovale é una conica, questi flock si chiamano **flock di Betten** perché questi flock corrispondono ai piani di traslazione di Betten [**11**]. Questi flock ammettono un gruppo di automorfismi che agisce in modo 2-transitivo sui piani del flock. Allora poniamo la seguente domanda:

Quali sono i flock ovali che ammettono un gruppo 2-transitivo?

Per esempio, il flock di Kantor-Knuth ammettono un gruppo 2-transitivo.

Ricordiamo che il piano di traslazione corrispondente a questo flock può essere rappresentato nella seguente forma:
La fibrazione in $PG(3,q)$ consiste degli spazi vettoriali $x = 0$, $y = x \begin{bmatrix} u & \alpha t^\sigma \\ t & u \end{bmatrix}$ tale che $u, t \in GF(q)$, q dispari, α fissato in $GF(q)$, σ un automorfismo per ogni elemento t in $GF(q)$. Questa fibrazione é un fibrazione su un semicorpo e quindi esiste un gruppo transitivo. Ma anche il seguente gruppo agisce sul piano:

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^{(\sigma-1)/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^{(\sigma+1)/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^\sigma \end{bmatrix} \mid t \in GF(q) - \{0\} \right\rangle$$

Questo gruppo induce un gruppo di automorfismi sul flock che agisce 2-transitivamente.

Jha e Johnson hanno determinato completamente tale classe:

Teorema 20.8. (Jha-Johnson [**57**], [**58**]).

Sia F un flock ovale in $PG(3, q)$ che ammette un gruppo in $PGL(4, q)$ 2-transitivo sui piani del flock. Allora si ha uno dei seguenti casi:

(1) F é lineare

(2) L'ovale é un ovale di traslazione

(a) Se q é dispari allora il flock é un flock di Kantor-Knuth o un flock di Fisher-Thas-Walker.

(b) Se q é pari e l'ovale é una conica allora il flock é un flock di Betten.

(c) Se q é pari e l'ovale non é una conica allora il flock é un flock ovale di traslazione di Thas.