Capitolo 3

Funzioni caratteristiche

3.1 Definizioni e proprietà elementari

Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$ si dice misurabile se sono misurabili sia la sua parte reale $\Re f$ sia la sua parte immaginaria $\Im f$, che sono funzioni a valori reali; analogamente si dirà che f è integrabile se tali sono $\Re f$ e $\Im f$. In tal caso, si definirà

$$\int f \, \mathrm{d}\mu := \int \Re f \, \mathrm{d}\mu + i \int \Im f \, \mathrm{d}\mu \,.$$

Valgono per l'integrale delle funzioni a valori complessi le stesse proprietà che per l'integrale delle funzioni reali, con la sola eccezione di quelle che dipendono dall'essere $\mathbb{R}$ un insieme totalmente ordinato. A titolo d'esempio, dimostriamo l'importante diseguaglianza

$$\left| \int f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int |f| \, \mathrm{d}\mu \,.$$

Scritto l'integrale $\int f \, \mathrm{d}\mu$ sotto forma trigonometrica

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \rho e^{i\theta} \qquad (\rho \text{ e } \theta \text{ reali e } \rho > 0) \,,$$

si ha

$$\left| \int f \, \mathrm{d}\mu \right| = \rho = \int e^{-i\theta} f \, \mathrm{d}\mu \,,$$

e, poiché ρ è reale,

$$\left| \int f \, \mathrm{d}\mu \right| = \int \Re(e^{-i\theta} f \, \mathrm{d}\mu \leq \int \left| \Re(e^{-i\theta} f) \right| \, \mathrm{d}\mu \leq \int |f| \, \mathrm{d}\mu \,.$$

Definizione 3.1.1. Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sia X una v.a. reale. La funzione $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathcal{C}$ definita da

$$\varphi_X(t) := \mathbb{E}[\exp(itX)] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \, \mathrm{d}F_X(x) \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{3.1.1}$$

si dice *funzione caratteristica* (f.c.) di X. ◇

L'integrale che compare nella (3.1.1) esiste finito per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per ogni v.a. X. La stessa (3.1.1) mostra, poi, che la f.c. φ_X dipende solo dalla f.r. F_X di X, o, ciò che è lo stesso, dalla legge $\mathbb{P}_X$. Ove non vi sia pericolo di confusione, si scriverà φ in luogo di φ_X, e, se opportuno, si parlerà della f.c. di una legge anziché di una v.a..

La funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{C}$ definita dalla (3.1.1) si dice anche *trasformata di Fourier–Stieltjes* della misura di Stieltjes μ_F generata dalla f.r. F; si vedrà tra breve che, se la f.r. F è assolutamente continua con densità eguale a f, allora la trasformata di Fourier–Stieltjes di μ_F coincide con l'usuale trasformata di Fourier della densità f.

Teorema 3.1.1. *Per una f.c. φ valgono le seguenti proprietà:*

(a) $\varphi(0) = 1$;

(b) $|\varphi(t)| \leq 1$ *per ogni* $t \in \mathbb{R}$;

(c) φ *è uniformemente continua in* $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. (a) e (b) sono ovvie. Per la (c) si ha

$$\begin{aligned} |\varphi(t+h) - \varphi(t)| &= |\mathbb{E}[\exp\{i(t+h)X\} - \exp(itX)]| \\ &\leq \mathbb{E}\left[|\exp(itX)|\,|\exp(ihX) - 1|\right] = \mathbb{E}\left[|\exp(ihX) - 1|\right] . \end{aligned}$$

L'ultimo termine tende a zero al tendere di h a zero, in virtú del teorema di convergenza dominata; esso non dipende da t, ciò che assicura che la convergenza sia uniforme. $\square$

Teorema 3.1.2. *Se esiste $t_0 \in \mathbb{R}$ con $t_0 \neq 0$ tale che $\varphi_X(t_0) = 1$, allora la v.a. X assume q.c. i valori $2\pi k/t_0 \quad (k \in \mathbb{Z})$.*

Dimostrazione. Da $\varphi_X(t_0) = 1$ scende $\mathbb{E}(\sin t_0 X) = 0$ e $\mathbb{E}(1 - \cos t_0 X) = 0$; poiché $1 - \cos t_0 X \geq 0$ segue che $\cos t_0 X = 1$ q.c. e perciò X è quasi certamente multipla di $2\pi/t_0$. $\square$

Proposizione 3.1.1. *Se la v.a. Y è una trasformazione affine della v.a. X, $Y = aX + b \quad (a, b \in \mathbb{R})$, si ha*

$$\varphi_Y(t) = \exp(itb)\, \varphi_X(at)$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Infatti

$$\varphi_Y(t) = \mathbb{E}(e^{itY}) = \mathbb{E}\left(e^{itb}\, e^{iatX}\right) = e^{itb} \varphi_X(at)\,,$$

cioè l'asserto. $\square$

Le funzioni caratteristiche svolgono quattro ruoli importanti in probabilità, ruoli che saranno esaminati nel resto di questo capitolo:

- esiste una corrispondenza biunivoca tra funzioni caratteristiche e funzioni di ripartizione, sicché si potrà individuare una legge di probabilià indicandone la sua f.c.(Sezione 3.2);
- esiste un legame profondo tra i momenti di una legge di probabilità e le derivate della corrispondente f.c.(Sezione 3.4);
- le f.c. consentono di determinare in maniera semplice la legge della somma di variabili aleatorie indipendenti (Sezione 3.5);
- infine esse esmplificano lo studio della convergenza completa di successioni di f.r., o, ciò che è equivalente, della convergenza in legge di una successione di v.a. (Sezione 3.6).

3.2 La formula d'inversione

La definizione mostra che ad ogni f.r. corrisponde una f.c.; si vedrà qui di seguito che, viceversa, ad ogni f.c. corrisponde una f.r., sicché si viene a stabilire una biiezione tra la famiglia delle f.c. e quella delle f.r.. Sarà pertanto equivalente individuare una legge di probabilità mediante la sua f.r. oppure attraverso la sua f.c.. Faremo uso del seguente lemma, la cui dimostrazione è usuale nei corsi di analisi complessa.

Lemma 3.2.1. *La funzione* $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$\psi(t) := \int_0^t \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x \tag{3.2.1}$$

è limitata e risulta

$$\lim_{t\to+\infty} \psi(t) = \frac{\pi}{2} \, . \tag{3.2.2}$$

Si vedrà negli esercizî che la funzione $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ non è integrabile nel senso di Lebesgue.

La funzione ψ è stata definita su $\mathbb{R}_+$; tuttavia, tenendo conto delle simmetrie delle funzioni identità e seno, la sua definizione può essere estesa a tutto $\mathbb{R}$, ponendo

$$\psi(t) := -\psi(-t) \quad \text{se} \quad t < 0 \, .$$

Teorema 3.2.1. (d'inversione). *Sia* φ *la f.c. della f.r.* F*; allora, per* $a < b$*, si ha*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \varphi(t) \, \mathrm{d}t \xrightarrow[T\to+\infty]{} \frac{F(b) + \ell^- F(b)}{2} - \frac{F(a) + \ell^- F(a)}{2} \, . \tag{3.2.3}$$

Dimostrazione. Si consideri l'integrale

$$\begin{aligned} I(T) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \varphi(t) \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \, \mathrm{d}t \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \, \mathrm{d}F(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}F(x) \int_{-T}^{T} \frac{e^{it(x-a)} - e^{it(x-b)}}{it} \, \mathrm{d}t \, , \end{aligned}$$

ove si è fatto ricorso al teorema di Fubini, ciò che è lecito perché l'integrando ha modulo eguale a

$$\left|\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\right| = \left|\int_a^b e^{-its}\,\mathrm{d}s\right| \le b-a\,,$$

e

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}F \int_{-T}^{T} (b-a)\,\mathrm{d}t = 2T(b-a) < +\infty\,.$$

Ora,

$$\begin{aligned}
2\pi\, I(T) &= \int_{\mathbb{R}} dF(x) \int_{-T}^{T} \mathrm{d}t \int_{x-b}^{x-a} e^{its}\,\mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}F(x) \int_{x-b}^{x-a} \mathrm{d}s \int_{-T}^{T} e^{its}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}F(x) \int_{x-b}^{x-a} ds \int_0^T \cos ts\,\mathrm{d}t = 2\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}F(x) \int_{T(x-b)}^{T(x-a)} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u \\
&= 2\int_{\mathbb{R}} \left(\psi[T(x-a)] - \psi[T(x-b)]\right)\,\mathrm{d}F(x) \\
&= 2\int_{\mathbb{R}} \left(\psi[T(x-a)] + \psi[T(b-x)]\right)\,\mathrm{d}F(x)\,,
\end{aligned}$$

relazione che mostra che $I(T)$ è finito, in virtú della limitatezza di ψ. Al tendere di T a $+\infty$, l'integrando tende a: 0, se $x<a$; a $\pi/2$, se $x=a$; a π, se $x\in\,]a,b[$; a $\pi/2$, se $x=b$; a 0, se $x>b$. Il teorema di convergenza dominata assicura che si abbia

$$\begin{aligned}
I(T) \xrightarrow[T\to+\infty]{} &\frac{1}{2}\left(F(a)-\ell^- F(a)\right) + \left(\ell^- F(b) - F(a)\right) \\
&+ \frac{1}{2}\left(F(b)-\ell^- F(b)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(F(b)+\ell^- F(b)\right) - \frac{1}{2}\left(F(a)+\ell^- F(a)\right)\,,
\end{aligned}$$

che conclude la dimostrazione. □

Si osservi che nella (3.2.3) non è, in generale, possibile sostituire il limite per T che tende a $+\infty$ con l'integrale esteso a tutto $\mathbb{R}$. Infatti, in generale, per una funzione $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, si ha

$$\lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{T} g(t)\,\mathrm{d}t \ne \int_{\mathbb{R}} g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Nella teoria delle funzioni, si definisce il *valore principale dell'integrale* di g come

$$\mathrm{PV}\int_{\mathbb{R}} g(t)\,\mathrm{d}t := \lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{T} g(t)\,\mathrm{d}t\,;$$

quest'ultimo può esistere anche quando non esista l'integrale di g esteso a tutto $\mathbb{R}$.

Se la funzione di ripartizione F è continua in a e in b, allora la (3.2.3) si può scrivere nella forma

$$F(b) - F(a) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \, \varphi(t) \, \mathrm{d}t \,. \tag{3.2.4}$$

Il seguente corollario stabilisce l'asserita corrispondenza biunivoca tra f.r. e f.c..

Corollario 3.2.1. *Sono equivalenti le proprietà:*

(a) *le f.r. F e G sono eguali, $F = G$;*

(b) *le f.c. φ_F e φ_G sono eguali, $\varphi_F = \varphi_G$.*

Dimostrazione. Basta dimostrare l'implicazione (b) $\Longrightarrow$ (a), perché l'altra scende dalla definizione di f.c.. La (3.2.3) dà, per ogni coppia di numeri reali a e b con $a < b$:

$$\big(F(b) + \ell^- F(b)\big) - \big(F(a) + \ell^- F(a)\big) = \big(G(b) + \ell^- G(b)\big) - \big(G(a) + \ell^- G(a)\big) \,.$$

Facendo tendere a a $-\infty$, si ottiene $F(b) + \ell^- F(b) = G(b) + \ell^- G(b)$ per ogni b reale; di qui segue che, se $b \in C(F) \cap C(G)$, allora $F(b) = G(b)$. Ma allora F e G, che, come f.r., sono entrambe continue a destra, coincidono. $\square$

Né la (3.2.3) né la (3.2.4) sono convenienti per i calcoli. Si hanno però formule piú semplici, e piú utili, se valgono ipotesi piú restrittive. In particolare, è utile il seguente risultato.

Teorema 3.2.2. *Se la f.c. φ è integrabile, cioè $\varphi \in \mathcal{L}^1$, allora la f.r. F che le corrisponde è assolutamente continua e ha densità data da*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \, \varphi(t) \, \mathrm{d}t \quad (x \in \mathbb{R}) \,. \tag{3.2.5}$$

Dimostrazione. Nella (3.2.3) si prendano $b = x$ e $a = x - h$ con $h > 0$; poiché la condizione di integrabilità assicura che il valor principale coincida con l'integrale, cioè, formalmente, se $g \in L^1$, allora

$$\int_{\mathbb{R}} g(t) \, \mathrm{d}t = \lim_{T \to +\infty} \int_{-T}^{T} g(t) \, \mathrm{d}t \,,$$

si ha

$$F(x) + \ell^- F(x) - \big(F(x-h) + \ell^- F(x-h)\big) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ith} - 1}{it} \, e^{-itx} \, \varphi(t) \, \mathrm{d}t \,.$$

In quest'ultima relazione, si prenda il limite $h \downarrow 0$; il secondo membro tende a zero in virtú del teorema di convergenza dominata, mentre il primo ha come limite $F(x) - \ell^- F(x)$. Perciò, F è continua in $\mathbb{R}$ e si può quindi usare la (3.2.4).

Dimostriamo ora che la f.r. F è assolutamente continua. A tal fine basta mostrare che essa è Lipschitziana. Per ogni x ed per ogni h in $\mathbb{R}$ si ha

$$F(x+h) - F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1-e^{-ith}}{it} \, e^{-itx} \, \varphi(t) \, \mathrm{d}t \, .$$

Di qui

$$|F(x+h) - F(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1-e^{-ith}}{it} \right| \, |\varphi(t)| \, \mathrm{d}t \, ;$$

scrivendo, come sopra,

$$\left| \frac{1-e^{-ith}}{it} \right| = \left| \int_0^h e^{-its} \, \mathrm{d}s \right| \leq \int_0^{|h|} \left| e^{-its} \right| \, \mathrm{d}s \leq |h| \, ,$$

si ottiene

$$|F(x+h) - F(x)| \leq \frac{\|\varphi\|_1}{2\pi} \, |h| \, ,$$

ciò che prova che F è assolutamente continua.

La (3.2.4), scritta con $b = x + h$ e $a = x \quad (h > 0)$, dà

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1-e^{-ith}}{ith} \, e^{-itx} \, \varphi(t) \, \mathrm{d}t \, ;$$

esiste quindi il limite per $h \to 0$ che è eguale al secondo membro della (3.2.5). In maniera analoga si procede se $h < 0$. □

3.3 Funzioni caratteristiche notevoli

Diamo di seguito la lista delle f.c. di alcune delle leggi di probabilità che si sono già incontrate.

Esempio 3.3.1. (v.a. costante q.c.). $X = a$; $\varphi(t) = \exp(iat)$. ■

Esempio 3.3.2. (v.a. di Bernoulli). $\varphi(t) = pe^{it} + q$. ■

Esempio 3.3.3. (Legge binomiale di parametri n e p). $X \sim bi(n,p)$:

$$\varphi(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^j q^{n-j} e^{itj} = (pe^{it} + q)^n \, ;$$

questo risultato si sarebbe potuto ottenere facilmente come conseguenza di (3.5.6) e di (3.3.2). ■

Esempio 3.3.4. (Legge geometrica). Si ha

$$\varphi(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} pq^{n-1} e^{itn} = \frac{pe^{it}}{1 - qe^{it}} \, .$$

■

Esempio 3.3.5. (Legge di Poisson).

$$\varphi(t) = e^{-\lambda} \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{\lambda^n}{n!}\, e^{itn} = e^{-\lambda} \exp(\lambda\, e^{it}) = \exp\{\lambda\,(e^{it}-1)\}\,.$$

■

Esempio 3.3.6. (Distribuzione uniforme in $(-a,a)$). Se $t \neq 0$ è

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} \cos tx \ \mathrm{d}x + \frac{i}{2a} \int_{-a}^{a} \sin tx \ \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \int_0^a \cos tx \ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{at}\, [\sin tx]_{x=0}^{x=a} = \frac{\sin at}{at}\,.\end{aligned}$$

Se $t=0$ si ha $\varphi(0)=1$, come per ogni f.c.; si osservi che φ è continua nell'origine (in particolare). ■

Esempio 3.3.7. (Legge normale). Si consideri, innanzi tutto, il caso di una v.a. $X \sim N(0,1)$:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\, e^{itx}\, \mathrm{d}x = \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}\,(x-it)^2\right)\, \mathrm{d}x\,.$$

La funzione $z \mapsto f(z) := e^{-z^2/2}$ è analitica in tutto $\mathbb{C}$; è perciò nullo il suo integrale esteso al contorno indicato in Fig. 3.1. Sia $z = \alpha - is$, con $s \in [0,|t|]$, un arbitrario punto del segmento chiuso DA; allora

$$\left|\exp\left(-\frac{1}{2}\,(\alpha - is)^2\right)\right| = \exp\left(\frac{s^2-\alpha^2}{2}\right) \le \exp\left(\frac{t^2-\alpha^2}{2}\right),$$

poiché $|e^z| = e^{\Re z}$. Perciò

$$\left|\int_D^A f(z)\ \mathrm{d}z\right| \le \int_0^{|t|} \left|\exp\left(-\frac{(a-is)^2}{2}\right)\right|\ \mathrm{d}s \le |t|\, \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right)\, e^{t^2/2}\,,$$

donde, per ogni $t\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \left|\int_D^A f(z)\ \mathrm{d}z\right| = 0\,.$$

Similmente, per ogni $t\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \left|\int_B^C f(z)\ \mathrm{d}z\right| = 0\,.$$

Perciò

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \int_B^A f(z)\ \mathrm{d}z = \lim_{\alpha\to+\infty} \int_C^D f(z)\ \mathrm{d}z\,;$$

ma

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \int_B^A f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\ \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}\,,$$

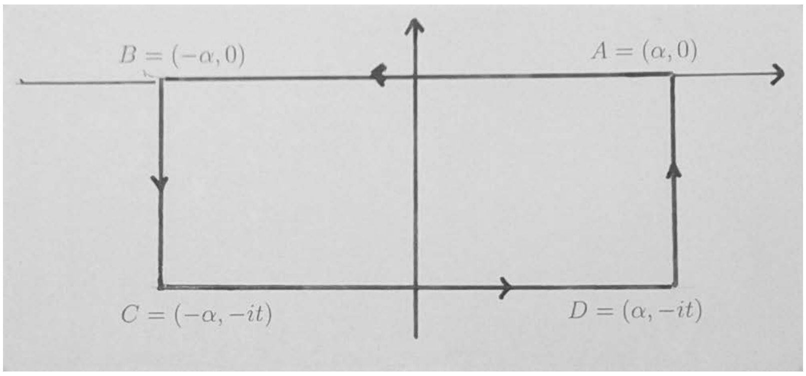

Figura 3.1: *Il contorno d'integrazione per la f.c. della legge normale con $\alpha > 0$ e $t > 0$.*

sicché

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_C^D f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-it)^2}{2}\right)\ \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}\,,$$

e dunque

$$\varphi_{N(0,1)}(t) = e^{-t^2/2}\,.$$

Poiché $X \sim N(m, \sigma^2)$ se $X = \sigma Y + m$ con $Y \sim N(0,1)$, la Proposizione 3.1.1 dà

$$\varphi_{N(m,\sigma^2)}(t) = \exp\left(itm - \frac{1}{2}\,\sigma^2 t^2\right)\,.$$

■

Esempio 3.3.8. (La legge gamma). $X \sim \Gamma(r, \lambda)$:

$$\varphi(t) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \int_0^{+\infty} x^{r-1} \exp\left(-(\lambda - it)x\right)\ \mathrm{d}x\,.$$

Per $r > 0$, la funzione $z \mapsto f(z) := z^{r-1} e^{-z}$ è analitica in ogni regione del piano complesso che non contenga l'origine. È cosí nullo il suo integrale calcolato lungo il contorno indicato in Fig. 3.2

Usando coordinate polari, con $\alpha = \lambda - it$, si ha

$$\begin{aligned}
\left|\int_C^D z^{r-1} e^{-z}\ \mathrm{d}z\right| &= \rho^r \left|\int_{\theta_0}^0 e^{ir\,\theta} \exp(-\rho e^{i\theta})\ \mathrm{d}\theta\right| \\
&\le \rho^r \int_0^{|\theta_0|} \left|\exp\left(-\rho e^{i\theta}\right)\right|\ \mathrm{d}\theta \\
&= \rho^r \int_0^{|\theta_0|} e^{-\rho\cos\theta}\ \mathrm{d}\theta = \rho^r\,|\theta_0|\,e^{-\rho\cos\theta'}\,,
\end{aligned}$$

per un opportuno $\theta' \in\,]0, |\theta_0|[$. Perciò

$$\lim_{\substack{\rho \to 0 \\ \rho > 0}} \left|\int_C^D z^{r-1} e^{-z}\ \mathrm{d}z\right| = 0\,.$$

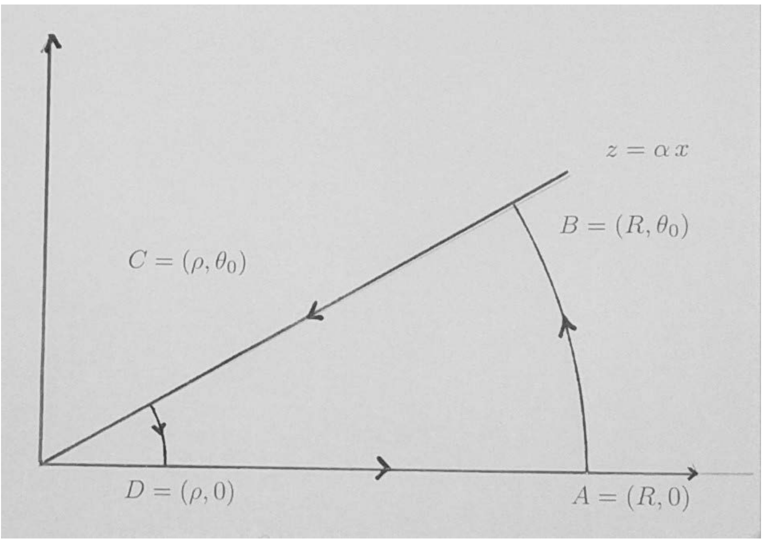

Figura 3.2: *Il contorno d'integrazione per la legge gamma con* $0 < \rho < R$ *e* $\theta_0 > 0$.

Analogamente,

$$\lim_{R\to+\infty}\left|\int_A^B z^{r-1}e^{-z}\,\mathrm{d}z\right| = 0\,.$$

Scende pertanto dal teorema di Cauchy

$$\lim_{\substack{R\to+\infty\\ \rho\to 0,\rho>0}}\int_C^B f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\substack{R\to+\infty\\ \rho\to 0,\rho>0}}\int_D^A f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Ora

$$\lim_{\substack{R\to+\infty\\ \rho\to 0,\rho>0}}\int_D^A f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{+\infty} x^{r-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x = \Gamma(r)\,,$$

mentre

$$\lim_{\substack{R\to+\infty\\ \rho\to 0,\rho>0}}\int_C^B f(z)\,\mathrm{d}z = \alpha^r\int_0^{+\infty} x^{r-1}e^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x\,.$$

In definitiva, risulta

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\int_0^{+\infty} x^{r-1}\exp\left(-(\lambda - it)x\right)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\,\frac{\Gamma(r)}{\alpha^r} = \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^r = \left(1 - i\frac{t}{\lambda}\right)^{-r}.\end{aligned}$$

■

Da quest'ultimo risultato si ha, in particolare, per la distribuzione esponenziale che ha legge $\Gamma(1,\lambda)$:

Esempio 3.3.9. (Legge esponenziale). $\varphi(t) = \left(1 - i\dfrac{t}{\lambda}\right)^{-1}$. ■

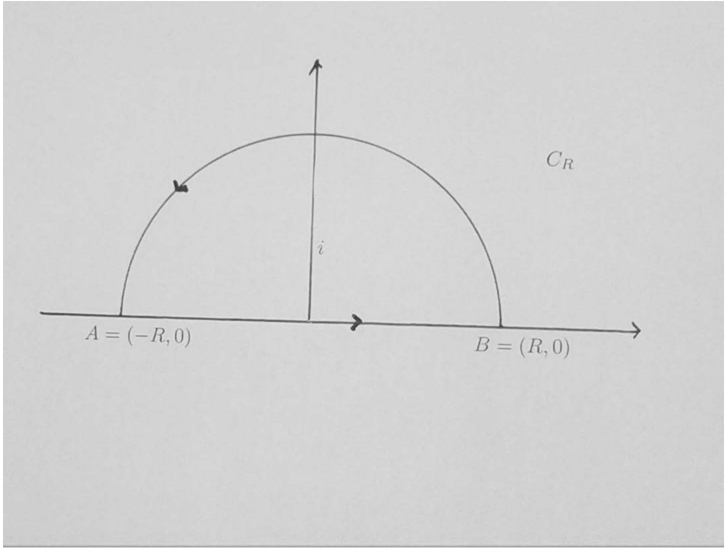

Figura 3.3: *Il contorno d'integrazione per la legge di Cauchy e $t > 0$.*

Esempio 3.3.10. (Legge di Cauchy). Si consideri dapprima il caso dei parametri $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, $X \sim C(0, 1)$. Dovendo calcolare

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\exp(itx)}{1 + x^2}\, \mathrm{d}x\,,$$

si consideri la funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da

$$f(z) := \frac{e^{itz}}{1 + z^2}\,,$$

che ha due poli semplici in $z = i$ e in $z = -i$. Supposto $t > 0$, si integri f lungo il contorno indicato in figura 3.3; sia $R > \sqrt{2}$ il raggio della semicirconferenza C_R.

Il teorema dei residui dà

$$\int_A^B + \int_{C_R} f(z)\, \mathrm{d}z = 2\pi\, i\, r(i)\,,$$

ove $r(i)$ è il residuo di f in $z = i$. Ora,

$$r(i) = \left. \frac{e^{itz}}{i + z} \right]_{z=i} = \frac{e^{-t}}{2i}$$

e

$$\begin{aligned}
\left| \int_{C_R} f(z)\, \mathrm{d}z \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{\exp\left(itR\, e^{i\theta}\right)}{1 + R^2\, \exp(2i\theta)}\, Ri\, e^{i\theta}\, \mathrm{d}\theta \right| \\
&\leq R \int_0^\pi \frac{\left|\exp\left(itR\, e^{i\theta}\right|\right)}{\left[(1 + R^2\, \cos 2\theta)^2 + R^4\, \sin^2 2\theta\right]^{1/2}}\, \mathrm{d}\theta \\
&\leq \frac{R}{R^2 - 1} \int_0^\pi \exp\left(-Rt\, \sin\theta\right)\, \mathrm{d}\theta = \pi\, \frac{R}{R^2 - 1}\, e^{-tRk}
\end{aligned}$$

con $k \in]0,1[$; perciò,

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)\, \mathrm{d}z = 0$$

e quindi

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \pi\, e^{-t}\,.$$

Se, poi, $t < 0$, si integra lungo la semicirconferenza di raggio R contenuta nel semipiano delle ordinate negative e si ripetono le medesime cosiderazioni giungendo a

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \pi\, e^{t}\,.$$

Perciò $\varphi(t) = e^{-|t|}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Nel caso generale, $X \sim C(\alpha,\beta)$, dovendo calcolare

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi\beta} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2}\, \mathrm{d}x\,,$$

si effettua il cambio di variabile $y = (x-\alpha)/\beta$ per ottenere

$$\varphi(t) = e^{-\beta|t|}\, e^{it\alpha}\,.$$

■

3.4 Funzioni caratteristiche e momenti

Occorre premettere la seguente generalizzazione del teorema sulla derivazione sotto il segno d'integrale.

Teorema 3.4.1. *Siano μ una misura su $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ e $(x,t) \mapsto f(x,t)$ una funzione definita in $\mathbb{R}\times]a,b[$ con $-\infty \le a < b \le +\infty$, a valori in $\mathbb{C}$. Se vale:*

(a) *per ogni $t \in]a,b[$, la funzione $x \mapsto f(x,t)$ sia integrabile rispetto a μ;*

(b) *f sia derivabile rispetto a t ed esista una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ integrabile e tale che, per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $t \in]a,b[$, sia $|\partial_2 f(x,t)| \le g(x)$,*

Allora, la funzione

$$t \mapsto F(t) := \int_{\mathbb{R}} f(x,t)\, \mathrm{d}\mu(x)$$

è derivabile e si ha

$$F'(t) = \int_{\mathbb{R}} \partial_2 f(x,t)\, \mathrm{d}\mu(x)\,. \tag{3.4.1}$$

In particolare, se μ è una misura di probabilità, la (3.4.1) *si scrive*

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\left[f(\cdot,t)\right] = \mathbb{E}\left[\partial_2 f(\cdot,t)\right]\,.$$

Dimostrazione. Sia (t_n) un'arbitraria successione tendente a t, con $t_n \neq t$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e si consideri il rapporto incrementale

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} \, \mathrm{d}\mu(x) .$$

Le funzioni $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definite, per $n \in \mathbb{N}$, da

$$h_n(x) := \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} ,$$

sono misurabili e costituiscono una successione tendente a $\partial_2 f(x,t)$. D'altra parte, $h_n(x) = \partial_2 f\,[x, t + \theta_n(x)]$ e, pertanto, $|h_n| \leq g$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, sicché l'asserto segue dal teorema di convergenza dominata. $\square$

Teorema 3.4.2. *Sia X una v.a. reale che ammetta momento di ordine $n \in \mathbb{N}$. Allora, la sua f.c. φ è derivabile n volte e risulta*

$$\mathbb{E}(X^k) = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{i^k} = \frac{1}{i^k} \left[\frac{d^k \varphi}{dt^k}\right]_{t=0} \qquad (k \leq n) .$$

Dimostrazione. Sia $f(x,t) := e^{itx}$; applicando il Teorema 3.4.1 a questa funzione, si ha

$$\left|\partial_2^k f(x,t)\right| = \left|i^k \, x^k \, \exp(itx)\right| \leq |x|^k .$$

Per ipotesi, $\mathbb{E}(|X|^k) < +\infty$ se $k \leq n$. Di qui l'asserto. $\square$

Il reciproco del Teorema 3.4.2 non è valido in generale perché una f.c. può essere derivabile nell'origine senza che la corrispondente distribuzione abbia media finita.

Esempio 3.4.1. Si consideri la legge individuata dalla densità

$$f(x) := k^{-1} \left(|x|^2 \ln |x|\right)^{-1} \mathbf{1}_{\{|x| \geq 2\}}(x) ,$$

ove la costante k è tale che

$$k = \int\limits_{\{|x| \geq 2\}} \frac{1}{|x|^2 \ln |x|} \, \mathrm{d}x .$$

Tale legge non ha speranza finita; infatti

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}} |x| f(x) \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{k} \left(\int_{-\infty}^{-2} + \int_2^{+\infty} \frac{1}{|x| \ln |x|)} \, \mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{2}{k} \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} \, \mathrm{d}x = \frac{2}{k} \left[\ln \ln x\right]_{x=2}^{x=+\infty} = +\infty . \end{aligned}$$

La sua f.c. è

$$\varphi(t) = \frac{2}{k} \int_2^{+\infty} \frac{\cos tx}{x^2 \ln x} \, \mathrm{d}x .$$

Questa ammette derivata nell'origine $t = 0$:

$$\frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = \frac{2}{k} \int_2^{+\infty} \frac{\cos hx - 1}{h} \frac{1}{x^2 \ln x} \, \mathrm{d}x \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \, .$$

La derivata non esiste se $t \neq 0$, perché

$$x \mapsto \frac{\sin tx}{x \ln x}$$

non è integrabile. Non esiste perciò neanche la derivata seconda di φ. ■

Vi è però un reciproco parziale del Teorema 3.4.2 che, alla luce dell'esempio precedente non può essere migliorato.

Teorema 3.4.3. *Se la f.c. φ di una v.a. X è derivabile un numero pari di volte, $2k$, allora X ha momento finito di ordine $2k$.*

Dimostrazione. Si supponga, dapprima, che sia $k = 1$. Si ponga

$$\alpha(t) := \Re\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos xt \, \mathrm{d}F(x) \, ,$$

e

$$\beta(t) := \Im\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} \sin xt \, \mathrm{d}F(x) \, ;$$

allora $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è pari, mentre $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è dispari. Le funzioni α e β sono derivabili e $\varphi' = \alpha' + i\beta'$; ora, α' è dispari, mentre β' è pari e perciò $\alpha'(0) = 0$. Si ha anche $\beta''(0) = 0$ perché β'' è nuovamente dispari. Quindi $\varphi''(0) = \alpha''(0)$. La formula di Taylor, applicata a α, dà $\alpha(t) = \alpha(0) + \frac{1}{2}\,\alpha''(0)t^2 + o(t^2)$, onde

$$\alpha''(0) = 2 \lim_{t \to 0} \frac{\alpha(t) - \alpha(0)}{t^2} = 2 \lim_{t \to 0} \frac{\alpha(t) - 1}{t^2} \, .$$

Sia (t_n) un'arbitraria successione infinitesima; dunque

$$\varphi''(0) = \alpha''(0) = 2 \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos t_n x - 1}{t_n^2} \, \mathrm{d}F(x) \, .$$

Definite le funzioni $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_-$ mediante $h_n(x) := (\cos t_n x - 1)/t_n^2$, risulta $\lim_{n \to +\infty} h_n(x) = -x^2/2$. Poiché $h_n \leq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, applicando il lemma di Fatou, si ottiene

$$\begin{aligned} -\int x^2 \, \mathrm{d}F(x) &= 2 \int \limsup_{n \to +\infty} h_n(x) \, \mathrm{d}F(x) \\ &\geq \limsup_{n \to +\infty} 2 \int h_n(x) \, \mathrm{d}F(x) = \varphi''(0) \, , \end{aligned}$$

sicché la speranza $\mathbb{E}(|X|^2)$ è finita. Il teorema è cosí dimostrato per $k = 1$. Si proceda ora per induzione, supponendo che φ sia derivabile nell'origine $2k$ volte e supponendo, altresí, di aver mostrato che X ammette momento di ordine $2k-2$, con $k \geq 1$. Allora

$$\varphi^{(2k-2)}(t) = i^{(2k-2)} \int_{\mathbb{R}} x^{2k-2}\, e^{itx}\, \mathrm{d}F(x) = (-1)^{k-1} \int_{\mathbb{R}} x^{2k-2} e^{itx}\, \mathrm{d}F(x)\,.$$

Posto

$$\alpha_{k-1}(t) := (-1)^{k-1} \int_{\mathbb{R}} x^{2k-2} \cos tx\, \mathrm{d}F(x)\,,$$

risulta, come sopra,

$$\varphi^{(2k)}(0) = 2 \lim_{t\to 0} \frac{\alpha_{k-1}(t) - \alpha_{k-1}(0)}{t^2}\,;$$

da questo punto la dimostrazione ricalca quella del caso $k = 1$. □

Corollario 3.4.1. *Se la f.c. φ della v.a. X è derivabile n volte, allora X ammette tutti i momenti di ordine $k \leq n$ se n è pari, mentre, se n è dispari, X ammette tutti i momenti di ordine $k \leq n-1$.*

3.5 Funzioni caratteristiche e indipendenza

Prima di presentare i risultati riguardanti la f.c. della somma di variabili aleatorie indipendenti, è opportuno richiamare come lo stesso problema sia risolto senza l'ausilio delle f.c..

Siano $X_1, \ldots, X_n$ v.a. indipendenti definite nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, e sia F_j la f.r. di X_j $(j = 1, \ldots, n)$. Si consideri il vettore aleatorio $\mathbf{X} := (X_1, \ldots, X_n)$ che prende valori in $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$; $\mathbf{X}$ induce una misura probabilità $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$ su $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ mediante

$$\mathbb{P}_{\mathbf{X}}(B) := \mathbb{P}(\mathbf{X} \in B) \qquad (B \in \mathcal{B}^n)\,.$$

Tale misura di probabilità si dice *legge di* $\mathbf{X}$.

In particolare, se $t_1, \ldots, t_n$ sono numeri reali, si consideri il boreliano

$$B = \left]-\infty, t_1\right] \times \cdots \times \left]-\infty, t_n\right]\,.$$

Poiché le v.a. $X_1, \ldots, X_n$ sono indipendenti si ha

$$\mathbb{P}_{\mathbf{X}}(]-\infty, t_1] \times \cdots \times]-\infty, t_n]) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} \{X_j \leq t_j\}\right) \tag{3.5.1}$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X_j \leq t_j) = \prod_{j=1}^{n} F_j(t_j)\,. \tag{3.5.2}$$

Ma allora $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$ è la misura prodotto delle misure di Stieljes $\mu_1, \ldots, \mu_n$ indotte da F_1, $\ldots$, F_n:

$$\mathbb{P}_{\mathbf{X}} = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n\,.$$

Pertanto, per ogni boreliano B di $\mathbb{R}^n$ è

$$\mathbb{P}_{\mathbf{X}}(B) = \int_{\{\mathbf{x}\in B\}} \mathrm{d}F_1(x_1)\dots \mathrm{d}F_n(x_n)\,.$$

Si può enunciare il risultato ottenuto nel seguente risultato.

Teorema 3.5.1. *Siano $X_1, \dots, X_n$ v.a. indipendenti e q.c. finite definite nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e siano $F_1, \dots, F_n$ le rispettive funzioni di ripartizione. Allora, per ogni $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, si ha*

$$\mathbb{P}(\mathbf{X} \in B) = \int_{\{\mathbf{x}\in B\}} dF_1(x_1)\dots \mathrm{d}F_n(x_n)\,. \tag{3.5.3}$$

Inoltre se $g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ è misurabile si ha

$$\mathbb{E}(g \circ \mathbf{X}) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x})\ \mathrm{d}F_1(x_1)\dots \mathrm{d}F_n(x_n)\,, \tag{3.5.4}$$

nel senso che, se esiste l'integrale a primo o a secondo membro, allora esiste anche l'altro e i due sono eguali.

Come esempio significativo di applicazione del Teorema 3.5.1 si considerino due v.a. X e Y f.r. F e G, rispettivamente, e la lora somma $Z = X + Y$. La f.r. H di Z è, per ognmi $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} H(t) &= \mathbb{P}(Z \le t) = \mathbb{P}(X + Y \le t) \\ &= \int_{\{(x,y):x+y\le t\}} \mathrm{d}F(x)\,\mathrm{d}G(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}G(y) \int_{x\in]-\infty,t-y]} \mathrm{d}F(x) = \int_{\mathbb{R}} F(t-y)\ \mathrm{d}G(y)\,. \end{aligned}$$

Dunque

$$H(t) = \int_{\mathbb{R}} F(t-y)\ \mathrm{d}G(y)\,. \tag{3.5.5}$$

L'operazione definita si chiama *convoluzione (di Stieltjes)*; spesso si scrive $H = F*G$.

Se entrambe le v.a. X e Y sono assolutamente continue con densità f e g rispettivamente anche la loro somma $X + Y$ è assolutamente continua e si ha, com'è noto $f_{X+Y} = f * g$.

Possiamo ora ritornare alle f.c..

Teorema 3.5.2. *Se X_1 e X_2 sono v.a. indipendenti definite sopra il medesimo spazio di probabilità, allora vale, per ogni $t \in \mathbb{R}$,*

$$\varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t)\,\varphi_{X_2}(t). \tag{3.5.6}$$

Dimostrazione. Si ponga, per $(j = 1, 2)$,

$$Y_j := \cos tX_j = \Re \exp(itX_j), \qquad Z_j := \sin tX_j = \Im \exp(itX_j)\,.$$

I vettori aleatorî (Y_1, Z_1) e (Y_2, Z_2) sono indipendenti e reali; perciò se φ_1 e φ_2 sono le f.c. di X_1 e X_2, rispettivamente,

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t)\,\varphi_2(t) &= \mathbb{E}(Y_1 + iZ_1)\,\mathbb{E}(Y_2 + iZ_2) \\
&= \mathbb{E}(Y_1)\,\mathbb{E}(Y_2) - \mathbb{E}(Z_1)\,\mathbb{E}(Z_2) \\
&\quad + i\left(\mathbb{E}(Y_1)\,\mathbb{E}(Z_2) + \mathbb{E}(Z_1)\,\mathbb{E}(Y_2)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(Y_1Y_2 - Z_1Z_2 + i(Y_1Z_2 + Z_1Y_2)\right) \\
&= \mathbb{E}\left((Y_1 + iZ_1)\,(Y_2 + iZ_2)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\exp(itX_1)\,\exp(itX_2)\right) = \mathbb{E}\left(\exp\left[it(X_1 + X_2)\right]\right) \\
&= \varphi_{X_1+X_2}(t)\,,
\end{aligned}$$

che conclude la dimostrazione. □

Il reciproco non è vero; si vedano gli esercizî. L'ultimo teorema si può enunciare in modo equivalente ricorrendo al concetto di convoluzione di leggi di probabilità.

Definizione 3.5.1. Siano μ_1 e μ_2 due leggi di probabilità su $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$; si dice *convoluzione* $\mu_1 * \mu_2$ di μ_1 e μ_2 la funzione $\mu_1 * \mu_2 : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$ definita da

$$(\mu_1 * \mu_2)(B) := \int_{\mathbb{R}} \mu_1(B - t)\ \mathrm{d}\mu_2(t) \qquad (B \in \mathcal{B})\,, \tag{3.5.7}$$

ove $B - t := \{y - t : y \in B\}$. ◇

Teorema 3.5.3. *Se μ_1 e μ_2 sono due misure di probabilità su $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, anche la loro convoluzione $\mu_1 * \mu_2$ è una misura di probabilità su $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$; la f.r. di $\mu_1 * \mu_2$ è $F_1 * F_2$ ove F_1 e F_2 sono le f.r. di μ_1 e di μ_2. Inoltre, se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è integrabile rispetto a $\mu_1 * \mu_2$ ($g \in L^1(\mu_1 * \mu_2)$), allora si ha*

$$\int_{\mathbb{R}} g(t)\ \mathrm{d}(\mu_1 * \mu_2)(t) = \int_{\mathbb{R}^2} g(x + y)\ \mathrm{d}\mu_1(x)\ \mathrm{d}\mu_2(y)\,. \tag{3.5.8}$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla (3.5.7) che $\mu_1 * \mu_2$ è una misura. Inoltre

$$(\mu_1 * \mu_2)(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} \mu_1(\mathbb{R} - t)\ \mathrm{d}\mu_2(t) = \int_{\mathbb{R}} \mu_1(\mathbb{R})\ \mathrm{d}\mu_2(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\mu_2(t) = 1\,.$$

Scende ancora dalla (3.5.7), ponendovi $B =]-\infty, x]$, che

$$\begin{aligned}
F_{\mu_1 * \mu_2}(x) = (\mu_1 * \mu_2)(]-\infty, x]) &= \int_{\mathbb{R}} \mu_1(]-\infty, x] - t)\ \mathrm{d}\mu_2(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mu_1(]-\infty, x - t])\ \mathrm{d}\mu_2(t) = \int_{\mathbb{R}} F_1(x - t)\ \mathrm{d}F_2(t) \\
&= (F_1 * F_2)(x)\,.
\end{aligned}$$

Per dimostrare la (3.5.8), si supporrà, dapprima, che g sia la funzione indicatrice di un boreliano B, $g = \mathbf{1}_B$. Allora $\mathbf{1}_{B-y}(x) = \mathbf{1}_B(x+y)$, sicché

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_B(x+y)\,\mathrm{d}\mu_1(x)\,\mathrm{d}\mu_2(y) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{B-y}(x)\,\mathrm{d}\mu_1(x)\,\mathrm{d}\mu_2(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \mu_1(B-y)\,\mathrm{d}\mu_2(y) = (\mu_1 * \mu_2)(B)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_B(t)\,\mathrm{d}(\mu_1*\mu_2)(t)\,;\end{aligned}$$

la (3.5.8) vale, dunque, per le funzioni indicatrici, e, quindi, per linearità, per le funzioni semplici; mediante il ragionamento oramai usuale, se ne stabilisce la validità anche per le funzioni misurabili positive e per le funzioni integrabili. □

Teorema 3.5.4. *Siano μ, μ_1, μ_2 leggi di probabilità su $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$; se $\mu = \mu_1 * \mu_2$, allora per le f.c. corrispondenti vale, per ogni $t \in \mathbb{R}$,*

$$\varphi(t) = \varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,.$$

Mediante i teoremi della Sezione 3.2 e quelli della presente è risolto, in linea di principio, il problema di determinare la legge della somma di un numero finito di v.a. indipendenti di ciascuna delle quali sia nota la legge. Quest'ultima è, per la v.a. X_j, individuata dalla sua f.c. φ_j, sicché la f.c. della somma $S_n = \sum_{j\le n} X_j$, che ne individua la legge, è data da $\varphi(t) = \prod_{j\le n} \varphi_j(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

3.6 Il teorema di continuità

I due teoremi che seguono, dovuti a Paul Lévy e a H. Cramér, sono noti sotto il nome complessivo di teorema di continuità e sono di larghissima applicazione nello studio di molti teoremi limite in teoria delle probabilità.

Teorema 3.6.1. *Sia (F_n) una successione di f.r. che converge completamente a $F \in \mathcal{D}$. Se φ_n e φ sono le f.c. di F_n e di F, rispettivamente, risulta, per ogni $t \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)\,.$$

Dimostrazione. L'asserto è un semplice corollario del Teorema (5.4.6) applicato alle funzioni di $C_b(\mathbb{R})$ definite da

$$\Re e^{itx} = \cos tx \qquad \text{e} \qquad \Im e^{itx} = \sin tx\,,$$

che stabilisce l'asserto. □

Teorema 3.6.2. *Sia (F_n) una successione di f.r. e sia $\{\varphi_n\}$ la corrispondente successione di f.c.. Se, per ogni $t \in \mathbb{R}$, esiste il limite*

$$\varphi(t) := \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(t)$$

e se la funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ cosí definita è continua in $t = 0$, allora φ è la f.c. di una f.r. F e inoltre si ha $F_n \xrightarrow[n\to+\infty]{c} F$.

Dimostrazione. Per il teorema di Helly, esistono una successione $(F_{n(j)})$ estratta da (F_n) e una funzione $F : \mathbb{R} \to [0,1]$, crescente e continua a destra tale che $(F_{n(j)})$ converga debolmente a F. Per stabilire che F è una f.r., occorre mostrare che

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x) = 1\,,$$

oppure, ciò che è lo stesso, che, se μ_F è la misura di Stieltjes indotta da F su $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, allora $\mu_F(\mathbb{R}) = 1$. Poiché $\lim_{j\to+\infty} \varphi_{n(j)}(t) = \varphi(t)$ e $|\varphi_{n(j)}(t)| \le 1$, il teorema di convergenza dominata dà, per ogni $\delta > 0$,

$$\frac{1}{\delta}\int_0^\delta \varphi(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{j\to+\infty} \frac{1}{\delta}\int_0^\delta \varphi_{n(j)}(t)\ \mathrm{d}t\,. \tag{3.6.1}$$

In virtú del teorema di Fubini, l'integrale a secondo membro è

$$\begin{aligned}\frac{1}{\delta}\int_0^\delta \varphi_{n(j)}(t)\ \mathrm{d}t &= \frac{1}{\delta}\int_0^\delta \mathrm{d}t \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\ \mathrm{d}F_{n(j)}(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}F_{n(j)}(x) \int_0^\delta \frac{e^{itx}}{\delta}\ \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\delta x}-1}{i\delta x}\ \mathrm{d}F_{n(j)}(x)\,.\end{aligned}$$

Per il Teorema (5.4.13), è

$$\lim_{j\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\delta x}-1}{i\delta x}\ \mathrm{d}F_{n(j)}(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\delta x}-1}{i\delta x}\ \mathrm{d}F(x)\,,$$

sicché la (3.6.1) si scrive

$$\frac{1}{\delta}\int_0^\delta \varphi(t)\ \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\delta x}-1}{i\delta x}\ \mathrm{d}F(x)\,.$$

Ora la continuità di φ in $t = 0$ dà

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta}\int_0^\delta \varphi(t)\ \mathrm{d}t = \varphi(0) = \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(0) = 1\,. \tag{3.6.2}$$

D'altra parte, poiché

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{e^{i\delta x}-1}{i\delta x} = 1\,,$$

prendendo una successione infinitesima (δ_n), il teorema di convergenza dominata dà, con ovvio significato dei simboli,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\delta_n x}-1}{i\delta_n x}\ \mathrm{d}F(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}F(x) = F(+\infty) - F(-\infty)\,;$$

quest'ultima differenza è, per la (3.6.2), eguale a 1. Perciò F è una f.r. e la successione $(F_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ converge completamente a F. Dunque φ è la f.c. di F.

Rimane da far vedere che tutta la successione (F_n) converge completamente a F. Se cosí non fosse, vi sarebbe $\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $r \in \mathbb{N}$, esista $F_{n(r)}$ con $n(r) \ge r$, con $d_L(F_{n(r)}, F) > \varepsilon$. Per il teorema di Helly, la sottosuccessione $(F_{n(r)})_{r\in\mathbb{N}} \subseteq (F_n)$ ne contiene un'altra, che si può supporre essere la stessa $(F_{n(r)})_{r\in\mathbb{N}}$, che converge debolmente a una funzione G crescente e continua a destra che, come sopra, si dimostra essere una f.r.. Ora $F \neq G$, ma $(\varphi_{n(r)})$ converge a φ sicché F e G sarebbero due f.r. differenti aventi la medesima f.c. ciò che è impossibile. □

In virtú dei risultati del Capitolo 2 e di questo, è ovvio il seguente

Teorema 3.6.3. *La successione di v.a. (X_n) converge in legge alla v.a. X se, e solo se, si verifica una delle seguenti condizioni equivalenti (F_n e F sono le f.r. di X_n e X, rispettivamente):*

(a) $d_L(F_n, F) \to 0$;

(b) $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$ *per ogni* $x \in C(F)$;

(c) *esiste un sottoinsieme denso di* $\mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $\overline{D} = \mathbb{R}$, *tale che*
$$\forall x \in D \qquad \lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x);$$

(d) $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(f \circ X_n) = \mathbb{E}(f \circ X)$ *per ogni* $f \in C_b(\mathbb{R})$;

(e) $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$ *per ogni* $t \in \mathbb{R}$, *ove* φ_n *è la f.c. di* X_n *e* φ *è la f.c. di* X.

Definizione 3.6.1. Una famiglia $\{f_\iota : \iota \in I\}$ di funzioni $f_\iota : \mathbb{R} \to \mathcal{C} \quad (\iota \in I)$ si dice *equicontinua* se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che $|h| < \delta$ implichi $|f_\iota(t+h) - f_\iota(t)| < \varepsilon$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per ogni $\iota \in I$. ◇

In particolare ogni funzione f_ι $(\iota \in I)$ di una famiglia equicontinua è uniformemente continua.

Teorema 3.6.4. *Una successione (φ_n) di f.c. che converga ad una f.c. φ è equicontinua.*

Dimostrazione. Sia F_n la f.r. corrispodente a φ_n e F la f.r. corrispondente a φ. Per il Teorema 3.6.3, si ha $F_n \xrightarrow[n\to+\infty]{c} F$. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste $a > 0$ tale che risulti $F_n(-a) < \varepsilon$ e $F_n(a) > 1 - \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infatti esiste un punto $b > 0$ di continuità per F tale che $F(-b) < \varepsilon$ e $F(b) > 1-\varepsilon$. Esiste pertanto $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_0$ sia $F_n(-b) < \varepsilon$ e $F_n(b) > 1-\varepsilon$. Inoltre per ogni $j = 1, 2, \dots, n_0 - 1$ esiste $a_j > 0$ tale che $F_j(-a_j) < \varepsilon$ e $F_j(a_j) > 1 - \varepsilon$. Basta, allora scegliere $a := \max\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}, b\}$ per avere $F_n(-a) < \varepsilon$ e $F_n(a) > 1 - \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre esiste $\delta > 0$ tale che $|e^{i\delta a} - 1| < \varepsilon$. Allora, per $|h| < \delta$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta
$$\begin{aligned}
|\varphi_n(t+h) - \varphi_n(t)| &\leq \int_{\mathbb{R}} \left| e^{ihx} - 1 \right| \, \mathrm{d}F_n(x) \\
&= \int_{\{|x|<a\}} \cdots + \int_{\{|x|\geq a\}} \left| e^{ihx} - 1 \right| \, \mathrm{d}F_n(x) \\
&\leq \int_{\{|x|<a\}} |e^{ihx} - 1| \, \mathrm{d}F_n(x) + 2 \int_{\{|x|\geq a\}} \mathrm{d}F_n(x) < 5\,\varepsilon \,,
\end{aligned}$$

che dimostra l'equicontinuità di (φ_n). □

Teorema 3.6.5. *Nei Teoremi 3.6.1 e 3.6.2 la convergenza delle f.c. è uniforme in ogni intervallo chiuso e limitato* $[a, b]$.

Dimostrazione. Sia dato $\varepsilon > 0$; segue dall'equicontinuità di (φ_n) e dall'uniforme continuità di φ che esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che $|\varphi_n(t + h) - \varphi_n(t)| < \varepsilon$ e $|\varphi(t + h) - \varphi(t)| < \varepsilon$ se $|h| < \delta$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$. Siano ora $t_j \quad (j = 0, 1, \dots, r + 1)$ punti tali che $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{r+1} = b$ e che $\max\{t_{j+1} - t_j : j = 0, 1, \dots, r\} < \delta$. Esiste allora $N \in \mathbb{N}$ tale che $|\varphi_n(t_j) - \varphi(t_j)| < \varepsilon$ per ogni j e per ogni $n \geq N$. Se $t \in [t_{j-1}, t_j]$, risulta, per $n \geq N$,

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| \leq |\varphi_n(t) - \varphi_n(t_j)| + |\varphi_n(t_j) - \varphi(t_j)| + |\varphi(t_j) - \varphi(t)| < 3\varepsilon\,,$$

che conclude la dimostrazione. □

Non è possibile eliminare, nell'enunciato del Teorema 3.6.2, la richiesta che la funzione limite φ sia continua in $t = 0$. Si considerino, infatti, i seguenti esempî.

Esempio 3.6.1. La f.c. della legge uniforme su $(-n, n)$ è

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin nt}{nt}.$$

Ora

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t) := \begin{cases} 0, & t \neq 0\,, \\ 1, & t = 0\,, \end{cases}$$

che non è una f.c.. ■

Esempio 3.6.2. Sia F_n la f.r. della legge esponenziale di parametro $1/n$

$$F_n(x) = \begin{cases} 0\,, & x < 0\,, \\ 1 - e^{-x/n}\,, & x \geq 0\,. \end{cases}$$

Allora $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$ per ogni x di $\mathbb{R}$. Ora $\varphi_n(t) = (1 - int)^{-1}$ e dunque

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t) := \begin{cases} 0\,, & t \neq 0, \\ 1\,, & t = 0\,, \end{cases}$$

che non è una f.c.. ■

3.7 Individuazione delle f.c.

Si pone la questione di riconoscere se un'assegnata funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sia la f.c. di una v.a., o di una legge di probabilità.

Definizione 3.7.1. Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ si dice *semidefinita positiva*, se si ha

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f(t_j - t_k) z_j \overline{z}_k \geq 0\,,$$

per ogni scelta di n in $\mathbb{N}$, di n numeri reali $t_1, t_2, \dots, t_n$, e di n numeri complessi $z_1, z_2, \dots, z_n$. ◇

Teorema 3.7.1. (Teorema di Bochner). *Per una funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua nell'origine e tale che $\varphi(0) = 1$ sono equivalenti le condizioni:*

(a) *φ è una f.c.;*

(b) *φ è semidefinita positiva.*

Dimostrazione. (a) $\Longrightarrow$ (b) Comunque si scelgano un numero naturale n, e, fissato n, n numeri reali $t_1, t_2, \dots, t_n$ e n numeri complessi $z_1, z_2, \dots, z_n$, è

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(t_j - t_k) z_j \overline{z}_k &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(i(t_j - t_k)\right) z_j \overline{z}_k \, \mathrm{d}F(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \{z_j \exp(it_j x)\}\left\{\overline{z_k \exp(it_k x)}\right\} \, \mathrm{d}F(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left|\sum_{j=1}^{n} z_j \exp(it_j x)\right|^2 \, \mathrm{d}F(x) \geq 0\,.\end{aligned}$$

(b) $\Longrightarrow$ (a) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è continua, allora, per ogni $T > 0$, si ha

$$\int_0^T \int_0^T \varphi(u - v) f(u) \overline{f(v)} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \geq 0\,; \tag{3.7.1}$$

infatti, l'integrale esiste sull'insieme compatto $[0, T] \times [0, T]$ ed è il limite delle somme di Riemann

$$\sum_j \sum_k \varphi(t_j - t_k) f(t_j) \overline{f(t_k)} \mathcal{D}t_j \mathcal{D}t_k\,,$$

ciascuna delle quali è positiva, perché φ è semidefinita positiva. Scegliendo ora $f(x) := \exp(-iux)$ nella (3.7.1), si ottiene

$$p_T(x) := \frac{1}{2\pi T} \int_0^T \int_0^T \varphi(u - v) \exp\{-i(u - v)x\} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \geq 0\,.$$

Si cambiino le variabili $s = u - v$, $t = v$. Si ottiene cosí

$$\begin{aligned}p_T(x) &= \frac{1}{2\pi T}\int_{-T}^{0} \varphi(s)\, e^{-isx} \, \mathrm{d}s \int_{-s}^{T} \mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi T}\int_0^T \varphi(s)\, e^{-isx} \, \mathrm{d}s \int_0^{T-s} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi T}\int_{-T}^{0} \varphi(s)\, e^{-isx} \, \mathrm{d}s \int_{-s}^{T} dt + \frac{1}{2\pi T}\int_0^T \varphi(s)\, e^{-isx} \, \mathrm{d}s \int_s^{T} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi T}\int_{-T}^{T} \varphi(s)\, e^{-isx} \, \mathrm{d}s \int_{|s|}^{T} dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} e^{-isx} \left(1 - \frac{|s|}{T}\right) \varphi(s) \, \mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-isx}\, \varphi_T(s) \, \mathrm{d}s\,,\end{aligned}$$

ove si è posto

$$\varphi_T(t) := \begin{cases} \left[1 - \left(\dfrac{|t|}{T}\right)\right] \varphi(t)\,, & \text{se } |t| \leq T, \\ 0\,, & \text{se } |t| > T. \end{cases} \tag{3.7.2}$$

Dimostreremo di seguito che:

(a) p_T è una densità di probabilità su $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$;

(b) φ_T è, per ogni $T > 0$, una f.c..

Questi due punti bastano per concludere la dimostrazione del teorema; infatti scende dalla (3.7.2) che, per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{T \to +\infty} \varphi_T(t) = \varphi(t) \,;$$

per ipotesi, φ è continua nell'origine, sicché, per il Teorema 3.6.2, anche φ è una f.c..

(a) Poiché già si sa che p_T è positiva e che è continua, e, quindi, misurabile, basta mostrare che è eguale a 1 il suo integrale su $\mathbb{R}$. Si consideri la successione crescente (ψ_n) di funzioni $\psi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$, definite da

$$\psi_n(x) := \begin{cases} 1 - \dfrac{|x|}{n} \,, & \text{se } |x| \leq n, \\ 0 \,, & \text{se } |x| > n. \end{cases}$$

Allora, $\psi_n \uparrow 1$ al tendere di n a $+\infty$ e la funzione $\psi_n \cdot p_T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua. Dal teorema di Beppo Levi scende, ricorrendo anche al teorema di Fubini,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} p_T(x) \, \mathrm{d}x &= \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \psi_n(x) p_T(x) \, \mathrm{d}x \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \psi_n(x) \, \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi_T(t) \, \mathrm{d}t \\
&= \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_T(t) \, \mathrm{d}t \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} \left(1 - \frac{|x|}{n}\right) e^{-itx} \, \mathrm{d}x \\
&= \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_T(t) \, \frac{1}{2\pi} \, \frac{[\sin(tn/2)]^2}{t^2 n/4} \, \mathrm{d}t \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi_T\left(\frac{2s}{n}\right) \frac{\sin^2 s}{s^2} \, \mathrm{d}s = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi_T(0) \, \frac{\sin^2 s}{s^2} \, \mathrm{d}s = 1 \,.
\end{aligned}$$

Abbiamo usato il fatto che $\varphi_T(0) = 1$ e il teorema di convergenza dominata, perché la funzione

$$s \mapsto \frac{\sin^2 s}{s^2}$$

è integrabile con l'integrale dato da

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin s^2}{s^2} \, \mathrm{d}s = \pi \,,$$

per il quale si vedano gli esercizî.

(b) Per stabilire che φ_T è la f.c. di p_T, si usa l'integrabilità appena stabilita di p_T e il teorema di convergenza dominata

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} e^{itx} p_T(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\psi_n(x) p_T(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \psi_n(x)\,\mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} e^{-(u-t)x}\,\varphi_T(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi_T(u) \left\{\frac{2\sin[(t-u)n/2]}{(t-u)n}\right\}^2 n\,\mathrm{d}u \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi_T\left(t-\frac{2s}{n}\right) \left(\frac{\sin s}{s}\right)^2 \mathrm{d}s = \varphi_T(t)\,,\end{aligned}$$

che conlude la dimostrazione. □

È conseguenza immediata del teorema di Bochner che se φ è una f.c., sono f.c. anche $\overline{\varphi}$, $|\varphi|^2$, $\Re\varphi$. Sempre per il teorema di Bochner, il prodotto di un numero finito di f.c. è ancora una f.c..

Una seconda caratterizzazione delle f.c. è data dal seguente teorema di Cramér, la dimostrazione del quale è, di fatto contenuta nel teorema precedente.

Teorema 3.7.2. *Per una funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua, limitata e tale che $\varphi(0) = 1$ sono equivalenti le seguenti proprietà:*

(a) *φ è una f.c.;*

(b) *per ogni $T > 0$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$, vale*

$$\int_0^T ds \int_0^T \varphi(s-t)\, e^{i(s-t)x}\,\mathrm{d}t \geq 0\,.$$

È talvolta utile il seguente criterio dovuto a Pólya (che non dimostreremo)

Teorema 3.7.3. *Se la funzione limitata $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soddisfà alle seguenti condizioni:*

(a) *$\varphi(0) = 1$;*

(b) *$\varphi(-t) = \varphi(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$;*

(c) *φ è convessa in $]0, +\infty[$;*

(d) *$\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$,*

allora φ è la f.c. di una f.r. assolutamente continua.

3.8 Funzione caratteristica di un vettore aleatorio

Anche per i vettori aleatorî è possibile definire la funzione caratteristica.

Definizione 3.8.1. Dato un vettore aleatorio $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ si dice funzione caratteristica di X la funzione $\varphi_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definita, per $t \in \mathbb{R}^n$, da

$$\varphi_X(t) := \mathbb{E}\left[\exp\left(i\langle t, X\rangle\right)\right] , \tag{3.8.1}$$

dove $\langle a, b\rangle$ denota il prodotto interno dei vettori $a, b \in \mathbb{R}^n$. $\diamond$

Usando il teorema del cambio di variabili, si vede anche in questo caso, che la f.c. di un vettore aleatorio è, in effetti la f.c. della sua legge (multidimensionale). Infatti

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(i\langle t, x\rangle\right) \, \mathrm{d}\mu_F(x) \qquad (t \in \mathbb{R}^n),$$

dove F è la f.r. del vettore X. Pertanto, si parlerà indifferentemente di f.c. di un vettore aleatorio o di una una legge di probabilità multidimensionale.

Si supponga che sia dato un v.a. $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$; sia m il vettore delle speranze, cioè $m := (\mathbb{E}(X_1), \mathbb{E}(X_2), \dots, \mathbb{E}(X_n))$, e sia Γ la matrice di varianza–covarianza di X: $\gamma_{ii} = V(X_i)$ e $\gamma_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ se $i \neq j$. Allora, per ogni $t \in \mathbb{R}^n$, la speranza della v.a. $\langle t, X\rangle$ è

$$\mathbb{E}\left(\langle t, X\rangle\right) = \sum_{j=1}^{n} t_j \, \mathbb{E}(X_j) = \langle t, m\rangle ,$$

mentre la sua varianza è

$$\begin{aligned} V\left(\langle t, X\rangle\right) &= \mathbb{E}\left(\langle t, X\rangle^2\right) - E^2\left(\langle t, X\rangle\right) = \mathbb{E}\left(\langle t, X\rangle^2\right) - \langle t, m\rangle^2 \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} t_j t_k \, \mathbb{E}\left(X_j X_k\right) - \sum_{j,k=1}^{n} t_j t_k \, \mathbb{E}\left(X_j\right) \, \mathbb{E}\left(X_k\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} t_j^2 \, V\left(X_j\right) - \sum_{j \neq k} t_j \, t_k \, \mathrm{Cov}(X_j, X_k) = \langle \Gamma t, t\rangle . \end{aligned}$$

Vale per le f.c. di vettori aleatorî lo stesso risultato che per le f.c. di una v.a.: una f.c. individua in modo univoco una legge di probabilità multidimensionale. Del seguente teorema non daremo la dimostrazione.

Teorema 3.8.1. *Le f.c. di due vettori aleatorî sono eguali se, e solo se, i due vettori hanno la stessa legge.*

È spesso utile il seguente criterio di indipendenza.

Teorema 3.8.2. *Sia $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vettore aleatorio n–dimensionale. Sono allora equivalenti le affermazioni:*

(a) *le componenti $X_1, \dots, X_n$ di X sono indipendenti;*

(b) *le f.c.* φ *di* X *e* $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ *di* $X_1,\dots,X_n$*, rispettivamente, sono legate dalla relazione*

$$\forall\, t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \qquad \varphi(t) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_j(t_j)\,.$$

Dimostrazione. (a) $\Longrightarrow$ (b) è

$$\begin{aligned}\varphi(t) &:= \mathbb{E}\left[\exp(i\langle t, X\rangle)\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{n} t_j\, X_j\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{n} e^{i\, t_j\, X_j}\right] = \prod_{j=1}^{n} \varphi_j(t_j)\,.\end{aligned}$$

(b) $\Longrightarrow$ (a) Sia $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ un vettore aleatorio n–dimensionale con componenti indipendenti e tale che, per ogni $j = 1, 2, \dots, n$, Y_j abbia la stessa legge, e quindi la stessa f.c., di X_j. Allora i vettori X e Y hanno, per la prima parte di questa dimostrazione, la stessa legge n–dimensionale; dunque le v.a. $X_1, X_2, \dots, X_n$ sono indipendenti. □

Definizione 3.8.2. Si dice che un vettore $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ è *gaussiano* o *normale* se è gaussiana, per ogni $t \in \mathbb{R}^n$, la v.a. $\langle t, X\rangle$. ◇

Teorema 3.8.3. (a) *La legge di un vettore gaussiano* X *è determinata dal vettore delle speranze* m *e dalla matrice di covarianza* Γ*; si scriverà*

$$X \sim N_n(m, \Gamma)\,.$$

(b) *Se* X *ha legge* $N_n(m, \Gamma)$*, se* A *è una matrice* $k \times n$ *e se* a *è in* $\mathbb{R}^k$*, allora il vettore aleatorio* $Y := AX + a$ *ha legge* $N_k(Am + a, A\Gamma A^t)$*.*

Dimostrazione. (a) La f.c. del vettore X è data da

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[\exp(i\langle t, X\rangle)\right] = \exp\left(i\langle t, m\rangle - \frac{1}{2}\langle \Gamma t, t\rangle\right).$$

(b) Per quanto visto in (a) si ha, per $t \in \mathbb{R}^k$,

$$\begin{aligned}\varphi_Y(t) &= \mathbb{E}\left[\exp\left(i\langle t, Y\rangle\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left(i\langle t, AX\rangle + i\langle t, a\rangle\right)\right] = e^{i\langle t,a\rangle}\, \mathbb{E}\left(e^{i\langle t, AX\rangle}\right) \\ &= e^{i\langle t,a\rangle}\, \mathbb{E}\left(e^{i\langle A^T t, X\rangle}\right) \\ &= e^{i\langle t,a\rangle}\, \exp\left(i\langle A^T t, m\rangle - \frac{1}{2}\langle \Gamma A^T t, A^T t\rangle\right) \\ &= \exp\left(i\langle t, Am + a\rangle - \frac{1}{2}\langle A\Gamma A^T t, t\rangle\right),\end{aligned}$$

che è la f.c. di un vettore con legge $N_k\left(Am + a, A\Gamma A^t\right)$. □

3.9 Note al Capitolo 3

Sezione 3.1 Le funzioni caratteristiche furono apparentemente usate per la prima volta da Lyapunov (1901) nella dimostrazione di un caso del Teorema del limite centrale (si veda il successivo Capitolo 4). Esse furono usate sistematicamente da Lévy in primo luogo per dare una dimostrazione piú semplice di quella originale del teorema di Lindeberg (di nuovo, si veda il successivo Capitolo 4); a tal proposito, si consultino (Lévy, 1922.a e 1922.b). Il riferimento d'obbligo per le f.c. è (Lukacs, 1970). Per le f.c. nell'ambito piú vasto delle trasformate di Fourier si veda, ad esempio, (Stromberg, 1994).

Sezione 3.2 La corrispondenza biunivoca tra funzioni caratteristiche e funzioni di ripartizione fu stabilita da Lévy (1922.c).

Sezione 3.6 Il teorema di continuità fu pubblicato da Lévy (1922.c); a questo teorema è associato anche il nome di Cramér perché la formulazione definitiva del teorema fu data in (Cramér, 1937). Per un'esposizione moderna si veda (Edwards, 1990).

Sezione 3.7 Il teorema di caratterizzazione delle f.c. è dovuto a Bochner (1952).

3.10 Esercizî sul Capitolo 3

3.1. Si ritrovino la media e la varianza delle seguenti leggi ricorrendo alle f.c.:

(a) binomiale $Bi(n,p)$;

(b) di Poisson;

(c) geometrica;

(d) $N(m,\sigma^2)$;

(e) gamma $\Gamma(r,\lambda)$;

(f) binomiale negativa;

3.2. Si calcoli la f.c. della legge uniforme sull'intervallo $(0,1)$ e si controlli che essa si annulla per $t = 2\pi\, k$ con $k \in \mathbb{Z}$.

3.3. Si calcoli la f.c. della *legge triangolare* che è individuata dalla densità

$$f(x) := \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{|x|}{\alpha}\right) \mathbf{1}_{(-\alpha,\alpha)}(x) \qquad (\alpha > 0)\,.$$

3.4. Si calcoli la f.c. della legge di Laplace di densità

$$f(x) := \frac{1}{2}\,\alpha\,\exp(-\alpha\,|x|) \qquad (\alpha > 0, x \in \mathbb{R})\,;$$

si mostri come si sarebbe potuto usare questo risultato per calcolare la f.c. della legge di Cauchy.

3.5. Si mostri che per ogni f.c. φ e per ogni $t \in \mathbb{R}$ vale

$$4\,\Re\{1-\varphi(t)\} \geq \Re\{1-\varphi(2t)\}\,.$$

Pertanto, se la successione (φ_n) di f.c. converge a 1 in un intervallo $[-T,T]$ essa converge a 1 su tutto $\mathbb{R}$.

3.6. Ricorrendo alle f.c. si dimostri il seguente teorema:

Teorema 3.10.1. *Nello spazio di probabilità* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *siano* X_1 *e* X_2 *v.a. indipendenti. Allora*

(a) *se* $X_i \sim N(m_i,\sigma_i^2)$ $\quad(i=1,2)$, *allora* $X_1+X_2 \sim N(m_1+m_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$;

(b) *se* X_i *ha legge binomiale di parametri* n_i *e* p $\quad(i=1,2)$, *allora* X_1+X_2 *ha legge binomiale di parametri* n_1+n_2 *e* p; *cioè* $X_i \sim Bi(n_i,p)$ $\quad(i=1,2)$ *implica* $X_1+X_2 \sim Bi(n_1+n_2,p)$;

(c) *se* X_i *ha legge di Poisson di parametro* λ_i $\quad(i=1,2)$, *cioè* $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$, *allora* X_1+X_2 *ha legge di Poisson di parametro* $\lambda_1+\lambda_2$, $X_1+X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2)$;

(d) *se* $X_i \sim \Gamma(\alpha_i,\theta)$ $\quad(i=1,2)$, *allora* X_1+X_2 *ha legge* $\Gamma(\alpha_1+\alpha_2,\theta)$.

3.7. Se φ_1, φ_2 e φ sono rispettivamente le f.c. delle v.a. X, Y e $X+Y$, si mostri, mediante un esempio, che può accadere che sia $\varphi(t)=\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ senza che X e Y siano indipendenti (sicché la condizione (3.5.6) è una condizione necessaria, ma non sufficiente per l'indipendenza).
(Suggerimento: la legge di Cauchy.)

3.8. La f.c. φ di F è reale se, e solo se, F è simmetrica.

3.9. Facendo riferimento alla funzione ψ definita dalla (3.2.1), si mostri che non esiste nel senso di Lebesgue l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

3.10. Si calcoli $\int_0^T e^{-ux}\sin x\,\mathrm{d}x$ e si usi il teorema di Fubini per calcolare

$$\int_0^T \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

ed ottenere cosí un'altra dimostrazione della (3.2.2).

3.11. Per il calcolo della f.c. della legge normale $N(0,1)$ si può procedere, oltre che come nel testo, in altri modi che evitano il ricorso all'analisi complessa. Di seguito ne sono indicati due.

(a) Si osserva che

$$\varphi(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\cos tx\,\mathrm{d}x\,;$$

si ricava mediante derivazione (ed un'integrazione per parti) un'equazione differenziale per φ; quest'ultima si può risolvere tenendo presente che si conosce la condizione $\varphi(0)=1$;

(b) si ricorre allo sviluppo in serie di e^{itx} e si integra a termine a termine la serie che si ottiene.

3.12. Se (z_n) è una successione di numeri complessi che converge a $z \in \mathbb{C}$, si calcoli

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n .$$

Questo risultato torna utile in molti casi in cui si vogliano dimostrare teoremi limite ricorrendo alla convergenza di f.c.. Lo si utilizzi per dimostrare direttamente il TLC (si veda il successivo Capitolo 4 per la terminologia) nel caso di una successione (X_n) di v.a. di L^2 indipendenti e isonome, risultato che stabiliremo come conseguenza del Teorema di Lindeberg nel Corollario 4.1.2.

3.13. L'insieme Δ^0 munito della convoluzione $*$ come operazione è un semigruppo commutativo con identità.

3.14. $E := \{\varepsilon_a : a \in \mathbb{R}\}$ è un sottosemigruppo commutativo di $(\Delta^0, *)$, detto *semigruppo di traslazione.*

3.15. Si individuino altri sottosemigruppi di $(\Delta^0, *)$ tenendo conto dell'Esercizio 3.6.

3.16. Se la v.a. X è assolutamente continua, allora la sua f.c. φ soddisfà alla proprietà

$$\lim_{|t|\to+\infty} \varphi(t) = 0$$

(teorema di Riemann–Lebesgue).

3.17. Le seguenti funzioni sono f.c.:

$$\varphi(t) = \frac{1}{1+|t|}\,; \tag{a}$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1-|t|\,, & 0 \le |t| \le 1\,, \\ 0\,, & |t| > 1\,; \end{cases} \tag{b}$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1-|t|, & 0 \le |t| \le 1/2\,, \\ \dfrac{1}{4|t|}\,, & |t| > 1/2\,; \end{cases} \tag{c}$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{1+|t|^\alpha} \quad (\alpha \in [0,1])\,. \tag{d}$$

3.18. Esistono due f.c. φ_1 e φ_2 con la proprietà che $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ per ogni $t \in [-a, a]$, ove $a > 0$ senza che le corrispondenti f.r. F_1 e F_2 siano eguali (o, ciò che è lo stesso, senza che sia $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$).

3.19. La funzione $t \mapsto e^{-|t|^\alpha}$ con $\alpha \in]0,1]$ è una f.c..

3.20. (a) Siano (F_n) e (G_n) due successioni di f.r. che convergono completemente alle f.r. F e G rispettivamente. Si mostri allora che $F_n * G_n \xrightarrow[n\to+\infty]{c} F * G$.
(b) Siano (X_n) e (Y_n) due successioni indipendenti di v.a. strettamente positive definite sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Se entrambe le successioni convergono in legge a v.a. strettamente positive X e Y, $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$, $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} Y$, si mostri che $X_n\, Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X\, Y$ e che $X_n/Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X/Y$.

3.21. Siano φ e ψ le f.c. corrispondenti alle f.r. F e G rispettivamente. Allora:

(a)
$$\overline{d}(F,G) := \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|\varphi(t)-\psi(t)|}{1+|t|}$$
è una metrica su Δ^0;

(b) la topologia di tale metrica è la stessa di quella di Lévy.

3.22. (a) Si mostri, partendo da una delle identità trigonometriche elementari che
$$\frac{\sin t}{t} = \prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{t}{2^n}\,.$$
(b) Siano (X_n) v.a. indipendenti tali che $\mathbb{P}(X_n=-\alpha)=\mathbb{P}(X_n=\alpha)=1/2$. Si mostri che
$$Y_n := \sum_{j=1}^{n} \frac{X_j}{2^j}$$
converge in legge ad una v.a. distribuita uniformente in $(-\alpha,\alpha)$.

3.23. Sia b un numero naturale con $b \geq 2$ e sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti ed isonome che assumono valori nell'insieme
$$\{0,1,\dots,b-1\}$$
e tali che per ogni $n\in\mathbb{N}$ sia $\mathbb{P}(X_n=j)=1/b \quad (j=0,1,\dots,b-1)$. Allora lo sviluppo in base b del numero di $[0,1]$
$$X := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{X_n}{b^n}$$
è uniformente distribuito in $[0,1]$.

3.24. Sia E un boreliano di $\mathbb{R}$ e sia $(x,\lambda)\to F(x,\lambda)$ una funzione boreliana in $\mathbb{R}^2$, tale che, per ogni $\lambda\in E$, $x\mapsto F_\lambda(x) := F(x,\lambda)$ sia una f.r.. Sia G una f.r. tale che $\mu_G(E)=1$.

(a) $x\mapsto H(x) := \int_E F_\lambda(x)\,\mathrm{d}G(\lambda)$ è una f.r., detta $(G-)$*mistura* della famiglia $\{F_\lambda : \lambda\in E\}$. (La convoluzione è un caso particolare: $n=1$ e $F_\lambda(x)=F(x-\lambda)$).

(b) Siano μ_H e μ_λ le misure di Borel–Stieltjes generate da H e da F_λ rispettivamente. Se $\varphi\in L^1(\mu_H)$, si mostri che
$$E_H(\varphi) = \int_E E_\lambda(\varphi)\,\mathrm{d}G(\lambda)\,.$$

(c) Se φ_λ è la f.c. di F_λ, allora per la f.c. φ_H di H vale
$$\varphi_H(t) = \int_E \varphi_\lambda(t)\,\mathrm{d}G(\lambda)\,.$$

(d) In particolare se (φ_n) è una successione di f.c. e se $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n = 1$, con $c_n \geq 0$, allora

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \varphi_n$$

è una f.c..

3.25. Si calcoli la f.c. della v.a. T_k, tempo del k–esimo successo in un processo di Bernoulli (X_n) sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e la usi per calcolare la varianza di T_k.

3.26. (a) La relazione $F * F_1 = F * F_2$ non implica $F_1 = F_2$;

(b) se, però, F è la f.r. della legge $N(0,1)$, allora da $F * F_1 = F * F_2$ scende $F_1 = F_2$.

3.27. Se $E \subseteq \mathbb{R}$ è un semigruppo abeliano rispetto all'addizione, la famiglia

$$\{F_\lambda : \lambda \in E\}$$

si dice *stabile per addizione* se, per ogni $\lambda_1, \lambda_2 \in E$, si ha

$$F_{\lambda_1} * F_{\lambda_2} = F_{\lambda_1+\lambda_2}\,.$$

(a) Sia, per $i = 1, 2$,

$$H_i(x) := \int_E F_\lambda(x)\, \mathrm{d}G_i(\lambda)$$

la G_i–mistura della famiglia $\{F_\lambda : \lambda \in E\}$ stabile per addizione. Allora la convoluzione $H_1 * H_2$ è la $(G_1 * G_2)$–mistura di $\{F_\lambda : \lambda \in E\}$.

(b) Se $E = \mathbb{Z}_+$ e la famiglia $\{F_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ è stabile per addizione, esiste una f.c. φ tale che $\varphi_n = \varphi^n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}_+$.

3.28. (a) Siano $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ funzioni equicontinue e si supponga che $f_n \to f$ uniformemente. Se $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x)\,.$$

(b) Si supponga che $X_n \to X$ in legge. Se (a_n) e (b_n) sono successioni reali tali che $a_n \to a$ e $b_n \to b$, allora

$$a_n X_n + b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} aX + b\,.$$

3.29. Siano X_j $\quad (j = 1, 2, \dots, n)$ v.a. indipendenti e tutte uniformemente distribuite nell'intervallo $(-1, 1)$. Si calcoli la densità della somma $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$.

3.30. Si dimostri che se $\alpha > 0$, la funzione $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$h(x) := \frac{1}{\pi}\,\frac{1 - \cos \alpha x}{\alpha x^2}$$

è una densità di probabilità e se ne calcoli la f.c..

3.31. Sia X una v.a. nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Si mostri che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, vale

$$\mathbb{P}(X = x) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{-itx} \varphi(t) \; \mathrm{d}t \, .$$

3.32. Siano X e Y due v.a. indipendenti ed isonome con f.c. comune φ. Siano $x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R}$ i punti di probabilità strettamente positiva

$$P_X(\{x_j\}) = \mathbb{P}(X = x_j) > 0 \, .$$

Allora si ha

$$\mathbb{P}(X - Y = 0) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\varphi(t)|^2 \; \mathrm{d}t \, ; \tag{a}$$

e

$$\mathbb{P}(X - Y = 0) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \left(P_X(\{x_j\})\right)^2 \, , \tag{b}$$

sicché

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\varphi(t)|^2 \; \mathrm{d}t = \sum_{j \in \mathbb{N}} \left(P_X(\{x_j\})\right)^2 ;$$

(c) se la f.c. φ è in $L^2(\mathbb{R})$, allora P_X attribuisce probabilità nulla ad ogni punto di $\mathbb{R}$ $\quad (\forall x \in \mathbb{R} \quad P_X(\{x\}) = 0)$.

3.33. Si determini la f.r. la cui f.c. è data da

$$\varphi(t) = C \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\cos jt}{j^2 \ln j}$$

e si usi questa f.c. per mostrare che non è vero il reciproco del Teorema 3.4.2. (Occorre, naturalmente, specificare il valore della costante C).

3.34. Si mostri che per ogni t reale e per ogni $n \in \mathbb{Z}_+$ vale

$$\left| e^{it} - \sum_{j=0}^{n} \frac{(it)^j}{j!} \right| \leq \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!} \wedge \frac{2\,|t|^n}{n!} .$$

Se φ è la f.c. di una v.a. X, allora

$$\left| \varphi(t) - \sum_{j=0}^{n} \frac{(it)^j \, \mathbb{E}(X^j)}{j!} \right| \leq \mathbb{E} \left(\frac{|t\,X|^{n+1}}{(n+1)!} \wedge \frac{2\,|t\,X|^n}{n!} \right) .$$

3.35. Le condizioni che seguono sono equivalenti per la successione (μ_n) dei momenti di una legge

(a) esiste $t > 0$ tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_{2n} t^{2n}}{(2n)!} < +\infty \, ,$$

(b) esiste $t > 0$ tale che
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mu_{2n} t^{2n}}{(2n)!} = 0\,,$$

(c) $\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{2n}\, \mu_{2n}^{\frac{1}{2n}} = A < +\infty$.

3.36. Se la successione dei momenti $(\mu_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$, con $\mu_0 = 1$, soddisfà a una delle condizioni equivalenti dell'esercizio precedente, essa individua una sola legge di probabilità. È noto che, se per $|t| \le t_0$ esiste la funzione generatrice dei momenti della v.a. X,
$$\psi(t) := \mathbb{E}\left(e^{tX}\right)\,,$$
allora esistono finiti i momenti di ogni ordine $\mu_n := \mathbb{E}(X^n)$. Si dimostri che valgono le relazioni:
$$\psi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \frac{t^n}{n!} \quad (|t| \le t_0) \tag{3.10.1}$$
$$\mu_n = \psi_X^{(n)}(0) = \left[\frac{d^n \psi_X(t)}{dt^n}\right]_{u=0} \tag{3.10.2}$$
Inoltre la funzione generatrice dei momenti individua la legge di X, nel senso che, se X e Y sono due v.a. per le quali esiste $t_0 > 0$ tale che $\psi_X(t) = \psi_Y(t)$ per $|t| \le t_0$, allora X e Y hannno la stessa legge.

3.37. Se per calcolare la f.c. della legge gamma si vuole evitare l'integrazione nel campo complesso, si sviluppi in serie la funzione $x \mapsto e^{it}$.

3.38. Sia X_p una v.a. con legge geometrica di paramento p. Per $\lambda > 0$ si consideri la successione $Y_n := \frac{1}{n} X_{\lambda/n}$. Si mostri che Y_n converge in legge a una v.a. esponenziale di parametro λ. Si studii anche la convergenza in legge delle v.a. definite, per ogni $n \in \mathbb{N}$, da
$$V_n := \frac{1}{n} X_p \qquad \text{e da} \qquad Z_n := \frac{1}{n} X_{p_n}\,,$$
dando, per quest'ultima successione, una condizione sufficiente sulla successione (p_n) affinché Z_n converga in legge ad una v.a. non costante.

3.39. Siano (X_n) e (Y_n) due successioni di v.a. che convergono in legge a X e Y rispettivamente e tali che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, X_n è indipendente da Y_n; inoltre X è indipendente da Y. Si mostri che $X_n + Y_n$ tende in legge a $X + Y$. (è istruttivo paragonare questo risultato a quanto visto nell'esercizio 2.27).

3.40. Sia G una f.r. Sono equivalenti le affermazioni:

(a) $G = \varepsilon_0$;

(b) $F * G = F$ per ogni f.r. F.

3.41. Siano X e Y due v.a., definite sul medesimo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, indipendenti, isonome con f.r. comune F e in L^2. Per ogni coppia (α, β) di numeri reali tali che $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, anche la v.a. $\alpha X + \beta Y$ ha f.r. F.

(a) Siano $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a. indipendenti tutte con f.r. F. Si trovi una costante α_n tale che la v.a.

$$\alpha_n \sum_{j=1}^{n} X_j$$

abbia f.r. F.

(b) Si determini F.

3.42. Sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti e isonome, con legge individuata dalla f.c. di Linnik

$$\varphi_\alpha(t) := \frac{1}{1+|t|^\alpha} \qquad (\alpha \in \,]0,1])\,.$$

(a) Si studii la convergenza in legge delle v.a.

$$T_n := \frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{j=1}^{n} X_j\,.$$

(b) Sia N una v.a. di legge geometrica di parametro p, indipendente da quelle della successione (X_n). La v.a.

$$Z_N := p^{1/\alpha} \sum_{j=1}^{N} X_j$$

ha legge di Linnik.

3.43. Sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti tali che per ogni $j \in \mathbb{N}$ sia $X_j \sim \Gamma(1, c^j)$; in altre parole per ogni indice j la v.a. X_j sia esponenziale di parametro c^j. Si consideri la v.a.

$$Y_n := X_1 \wedge X_2 \wedge \cdots \wedge X_n.$$

Allora

(a) si determini la legge di Y_n;

(b) si studi la convergenza di (Y_n).

3.44. Siano X e Y due v.a. indipendenti ed isonome centrate, entrambe con varianza eguale a 1, $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$, $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y^2) = 1$. Se le v.a. $U := X + Y$ e $V := X - Y$ sono indipendenti, allora X, e quindi Y, ha legge $N(0, 1)$.

3.45. In uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti e isonome con legge esponenziale $\Gamma(1, \lambda)$ e sia, al solito,

$$S_n := \sum_{j=1}^{n} X_j, \qquad S_0 := 0\,.$$

per $n \in \mathbb{Z}_+$ e per $t > 0$ si ponga

$$N_t := \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{\{S_j \le t\}}$$

(a) Si determini la legge di N_t;

(b) Se
$$T_t := (t' - t)\,\mathbf{1}_{\cup_{n\in\mathbb{Z}_+}\{S_n \le t < S_{n+1} = t'\}}\,,$$
la v.a. T_t ha la stessa legge di X_1.

3.46. Siano X e Y due v.a. indipendenti con f.r. F_1 e F_2 rispettivamente. Si trovi la f.c. del prodotto XY. Si usi quindi tale risultato per provare che se (Y_n) è una successione di v.a. indipendenti da X che converge in legge a Y, allora (XY_n) converge in legge a XY.

3.47. In uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sia data una v.a. X e si consideri il sottoinsieme J di $\mathbb{R}$ definito da
$$J := \left\{ t \in \mathbb{R} : \int_\Omega e^{tX}\, d\mathbb{P} < +\infty \right\}.$$
J è non vuoto perché, per ogni v.a. X, $0 \in J$. Se J contiene un intorno dell'origine, allora si definisce la *funzione generatrice dei momenti* della v.a. X, $\psi : J \to \mathbb{R}_+$ mediante
$$\psi(t) := \mathbb{E}\left(e^{tX}\right) = \int e^{tX}\, d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} e^{tx}\, dF(x)\,,$$
ove F è la f.r. di X. L'insieme J si dice *dominio proprio* della funzione generatrice dei momenti.

(a) Si mostri che se appartengono a J i punti $t_0 > 0$ e $-t_0$, allora J contiene l'intervallo $[-t_0, t_0]$;

(b) J è convesso;

(c) La funzione $g : J \to \mathbb{R}$ definita da $g(t) := \ln \psi(t)$ è convessa;

(d) la funzione generatrice dei momenti ψ è analitica in J, vale a dire che per ogni $t \in J$ vale
$$\psi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \alpha_n \frac{t^n}{n!}\,;$$
inoltre $\alpha_0 = 1$ e, per $n \in \mathbb{N}$
$$\alpha_n = \psi^{(n)}(0) = \int X^n\, d\mathbb{P}\,,$$
sicché X ha momenti di tutti gli ordini;

(e) si dia l'esempio di una v.a. per la quale $J = \{0\}$;

(f) la condizione che J contenga un intervallo è essenziale; si trovi, ad esempio, l'insieme J per la v.a. X che ha densità data da
$$f(x) := \frac{1}{x^2}\,\mathbf{1}_{(1,+\infty)}(x)\,;$$

(g) sono isonome due v.a. X e Y che hanno la stessa funzione generatrice dei momenti, $\psi_X = \psi_Y$.

3.48. Sia X una v.a. di L^1 con speranza eguale a m, sia ψ la sua funzione generatrice dei momenti e J il suo dominio proprio. Supposto che sia $J \neq \{0\}$, se $a \geq m$, vale la diseguaglianza dovuta a Cramér

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \exp\left(-\inf\{at - \ln\psi(t) : t \geq 0, t \in J^0\}\right) .$$

3.49. Si controlli che, per $t \neq 0$ non è integrabile la funzione

$$[2, +\infty[\, \ni x \mapsto \frac{\sin tx}{x \ln x} .$$

3.50. Si calcoli l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 s}{s^2}\, \mathrm{d}s = \pi .$$

3.51. Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti, tutte di legge $N(0, \sigma^2)$. Se θ è un numero reale, si definisca una nuova successione (Y_n) mediante

$$Y_1 := X_1, \qquad Y_n := \theta\, Y_{n-1} + X_n \text{ se } n \geq 2.$$

(a) Si calcoli $\mathbb{E}(Y_n)$ $(n \in \mathbb{N})$;

(b) si calcoli $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+1})$ $(n \in \mathbb{N})$;

(c) si determini la legge di Y_n $(n \in \mathbb{N})$;

(d) si studii la convergenza in legge della successione (Y_n).

3.52. Dalla f.c. del vettore aleatorio $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ si derivino le f.c. marginali delle componenti. In particolare si mostri che le componenti di un vettore aleatorio normale gaussiano sono ancora gaussiane.

3.53. Le v.a. X_n $(n \in \mathbb{N})$ e X abbiano f.c. φ_n e φ integrabili. Allora, tanto le v.a. X_n quanto X sono assolutamente continue; siano f_n e f le loro densità. Se è

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi_n(t) - \varphi(t)|\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 ,$$

allora

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

e (X_n) converge in legge a X.

3.54. Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ per la successione

$$(X_{nk})_{n\in\mathbb{N}; k=1,2,\dots,n}$$

sono equivalenti le affermazioni:

$$\max_{k\leq n} P\left(|X_{nk}| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 , \tag{a}$$

$$\max_{k\leq n} \int_{\Omega} \frac{X_{nk}^2}{1 + X_{nk}^2}\ \mathrm{d}\mathbb{P} = \max_{k\leq n} \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1 + x^2}\ \mathrm{d}F_{nk}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 . \tag{b}$$