CAPITOLO 3

Elementi di Teoria delle Distribuzioni (Laurent Schwartz)

La teoria delle distribuzioni iniziata da S.L. Sobolev nel 1936 e pienamente formulata da L. Schwartz negli anni '50, è stata di fondamentale importanza sia in matematica pura che in matematica applicata, aprendo la strada all'introduzione di nozioni generalizzate di derivazione ed integrazione che consentono di aggirare alcune difficoltà della teoria classica e di dare una trattazione rigorosa dei fenomeni impulsivi o discontinui. Il concetto di distribuzione generalizza quello di funzione in molte situazioni in cui viene meno la regolarità della funzione in questione. Esempi di distribuzioni sono le funzioni impulsive, molto usate nell'elettromagnetismo ed in meccanica quantistica ancor prima che ne venisse data un'opportuna interpretazione matematica.

3.1 Distribuzioni

Introduciamo in $C_0^\infty(\Omega)$ la seguente nozione di convergenza (forte).

Definizione 3.1.1. Sia $(\varphi_j) \subset C_0^\infty(\Omega)$,

$$\varphi_j \to 0 \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} i) & \exists\, K \text{ compatto contenuto in } \Omega : \ \operatorname{supp} \varphi_j \subset K\,, \quad \forall j \in \mathbb{N}\,; \\ ii) & D^\alpha \varphi_j \rightrightarrows 0 \ \text{ in } \Omega\,, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N\,. \end{cases}$$

Nel seguito indicheremo con $\mathcal{D}(\Omega)$ lo spazio vettoriale $C_0^\infty(\Omega)$ munito della convergenza prima definita e scriveremo $\varphi_j \xrightarrow[\mathcal{D}(\Omega)]{} 0$.
Osserviamo che $\mathcal{D}(\Omega)$ è chiuso rispetto all'operazione di derivazione.

Esempio: La successione

$$\varphi_j(x_1) = e^{-j}\varrho(x_1)\operatorname{sen}(jx_1)\,, \qquad j \in \mathbb{N}\,,$$

converge a zero in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Definizione 3.1.2. Sia $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ un funzionale lineare. Si dice che T è una **distribuzione** in Ω se

$$\forall\,(\varphi_j) \subset \mathcal{D}(\Omega), \qquad \varphi_j \xrightarrow[\mathcal{D}(\Omega)]{} 0 \quad \Longrightarrow \quad T(\varphi_j) \underset{j}{\to} 0$$

(cioè se T è continuo rispetto alla convergenza in $\mathcal{D}(\Omega)$).

Lo spazio vettoriale delle distribuzioni in Ω si indica con $\mathcal{D}'(\Omega)$ (esso è il duale topologico di $\mathcal{D}(\Omega)$).

Teorema 3.1.3. *(Caratterizzazione)*
Sia $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ *un funzionale lineare. Sono equivalenti:*

(a) $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$,

(b) $\forall\, K$ *compatto* $\subset \Omega \quad \exists\, c_K > 0,\, j_K \in \mathbb{N}_0$:

$$|\langle T, \varphi\rangle| = |T(\varphi)| \le c_K \sum_{|\alpha|\le j_K} \sup_K |D^\alpha \varphi| \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(K)\,.$$

Le funzioni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si chiamano funzioni *test* (delle distribuzioni). Inoltre si pone $\langle T, \varphi\rangle := T(\varphi)$.

La condizione (b) esprime il fatto che una distribuzione, localmente, agisce solo su un numero finito di derivate.

Dimostrazione.

$(a) \implies (b)$ Dimostriamo che $\neg(b)$ (i.e. la negazione di (b)) $\implies \neg(a)$ e quindi supponiamo che esista K_0 compatto $\subset \Omega$ tale che

$$\forall\, c > 0 \quad \forall\, j \in \mathbb{N}_0 \quad \exists\, \varphi_{c,j} \in \mathcal{D}(K_0) \quad \wedge \quad |\langle T, \varphi_{c,j}\rangle| > c \sum_{|\alpha|\le j} \sup_{K_0} |D^\alpha \varphi_{c,j}|\,.$$

Scelto $c = j \in \mathbb{N}$ e posto $\varphi_{c,j} = \varphi_j$ si ha

$$|\langle T, \varphi_j\rangle| > j \sum_{|\alpha|\le j} \sup_{K_0} |D^\alpha \varphi_j|$$

e, dalla linearità di T, risulta

$$\left| \left\langle T, \frac{\varphi_j}{j \sum_{|\alpha|\le j} \sup_{K_0} |D^\alpha \varphi_j|} \right\rangle \right| > 1\,.$$

Poniamo

$$\psi_j := \frac{\varphi_j}{j \sum_{|\alpha|\le j} \sup_{K_0} |D^\alpha \varphi_j|}\,.$$

Risulta $\psi_j \in \mathcal{D}(K_0)$ e inoltre $|D^\alpha \psi_j| \leq \frac{1}{j}$ per $|\alpha| \leq j$. Dunque

$$\psi_j \xrightarrow[\mathcal{D}(\Omega)]{} 0\,,$$

ma, essendo $|T(\psi_j)| > 1$, non può aversi $T(\psi_j) \underset{j}{\to} 0$, e quindi è provata la $\neg(a)$.

$(b) \implies (a)$ Sia $(\varphi_j) \subset \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi_j \xrightarrow[\mathcal{D}(\Omega)]{} 0$; per i) (della Definizione 3.1.1) esiste K compatto $\subset \Omega$ tale che $\quad supp\, \varphi_j \subset K$ (quindi $\varphi_j \in \mathcal{D}(K)$) $\quad \forall j \in \mathbb{N}$.
Da (b) segue che

$$\exists\, c_K > 0,\ j_K \in \mathbb{N}_0 \quad : \quad |\langle T, \varphi_j \rangle| \leq c_K \sum_{|\alpha| \leq j_K} \sup_K |D^\alpha \varphi_j|$$

e poiché per ii) (della Definizione 3.1.1) $D^\alpha \varphi_j \rightrightarrows 0$ deduciamo $|\langle T, \varphi_j \rangle| \to 0$, da cui segue la tesi. $\square$

Definizione 3.1.4. Sia $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Si dice che T è una distribuzione di **ordine finito** se verifica la seguente proprietà:

$$(b') \quad \exists j \in \mathbb{N}_0,\ \forall K \text{ compatto} \subset \Omega\ \exists c_K > 0 : |\langle T, \varphi \rangle| \leq c_K \sum_{|\alpha| \leq j} \sup_K |D^\alpha \varphi| \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(K)\,.$$

L'**ordine** è il minimo j per il quale vale (b').

Osserviamo che se vale (b') vale anche (b), ma non è vero il viceversa.

3.2 Esempi di distribuzioni

Sia $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ $\left(\overset{\text{def}}{\iff} \forall\, K \text{ compatto} \subset \Omega \quad u \in L^1(K) \right)$; definiamo

$$\begin{aligned} T_u : \mathcal{D}(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ \varphi \quad &\mapsto \langle T_u, \varphi \rangle := \int_\Omega u(x)\varphi(x)\, d\mathcal{L}^N(x)\,. \end{aligned}$$

Osserviamo che T_u è un funzionale lineare.

Sia K compatto $\subset \Omega$, allora $u \in L^1(K)$. Risulta

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(K) \qquad |\langle T_u, \varphi \rangle| = \left| \int_K u(x)\varphi(x)\, d\mathcal{L}^N(x) \right| \leq \int_K |u(x)|\, d\mathcal{L}^N(x) \cdot \sup_K |\varphi|\,,$$

che è la (b') con $j = 0$. Quindi **ad ogni u** $\in L^1_{\textbf{loc}}(\Omega)$ **si può associare una distribuzione** $\mathbf{T}_u$ (**distribuzione di ordine finito** (zero)).

Si usa scrivere (anche se impropriamente)

$$L^1_{\text{loc}}(\Omega) \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$$

(nel senso che ad ogni $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ si associa una particolare distribuzione in $\mathcal{D}'(\Omega)$).

Nel seguito (vedi Proposizione 3.2.1) proveremo che

$$L^1_{\text{loc}}(\Omega) \subsetneqq \mathcal{D}'(\Omega)$$

ovvero, l'immersione $L^1_{\text{loc}}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$, $u \mapsto T_u$, è iniettiva (cioè se u_1 e u_2 sono in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tali che $T_{u_1} = T_{u_2}$, allora $u_1 = u_2$ q.o.) ma non è suriettiva.

Distribuzione di Dirac (di polo x^0)**.**
Sia $x^0 \in \Omega$, definiamo il funzionale lineare

$$\begin{aligned} \delta_{x^0} : \mathcal{D}(\Omega) &\to \mathbb{C} \\ \varphi \quad &\mapsto \langle \delta_{x^0}, \varphi \rangle := \varphi(x^0)\,. \end{aligned}$$

δ_{x^0} è una distribuzione di ordine finito (zero). Infatti per ogni K compatto $\subset \Omega$

$$|\langle \delta_{x^0}, \varphi \rangle| = |\varphi(x^0)| \le \sup_K |\varphi| \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(K)\,.$$

Per $x^0 = 0$ si userà la notazione δ al posto di δ_0.

Proposizione 3.2.1.

$$\nexists\, u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N) : \quad \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\varphi(x)\, d\mathcal{L}^N(x) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)\,.$$

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che esista $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ tale che

$$\varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\varphi(x)\, d\mathcal{L}^N(x) \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)\,.$$

Per ogni $j \in \mathbb{N}$ scegliamo

$$\varphi_j(x) = \varrho(jx) = \begin{cases} e^{\frac{1}{j^2|x|^2-1}} & \text{se } |x| < \frac{1}{j} \\ 0 & \text{se } |x| \ge \frac{1}{j} \end{cases} \qquad \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)\,;$$

risulta allora

$$\varphi_j(0) = e^{-1} = \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\varphi_j(x)\, d\mathcal{L}^N(x) \qquad \text{per ogni } j \in \mathbb{N}.$$

Poiché

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\varphi_j(x)\, d\mathcal{L}^N(x) = \int_{|x|<\frac{1}{j}} u(x) e^{\frac{1}{j^2|x|^2-1}}\, d\mathcal{L}^N(x)\,,$$

si ha

$$e^{-1} = \int_{|x|<\frac{1}{j}} u(x) e^{\frac{1}{j^2|x|^2-1}}\, d\mathcal{L}^N(x) \qquad \text{per ogni } j \in \mathbb{N}.$$

Risulta pertanto

$$e^{-1} = \left| \int_{|x|<\frac{1}{j}} u(x) e^{\frac{1}{j^2|x|^2-1}} \, d\mathcal{L}^N(x) \right| < \int_{|x|<\frac{1}{j}} |u(x)| \, d\mathcal{L}^N(x) \tag{3.1}$$

per ogni $j \in \mathbb{N}$.
Tenuto conto che $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ segue che

$$\exists \lim_{j \to +\infty} \int_{|x|<\frac{1}{j}} |u(x)| \, d\mathcal{L}^N(x) = 0 \,,$$

e quindi passando al limite per $j \to +\infty$ in (3.1) si ha

$$e^{-1} \leq 0 \,,$$

manifestamente assurdo. □

Osservazione 3.2.2. In generale non è possibile definire la moltiplicazione di due o più distribuzioni [14]. Quindi, in particolare, si rinuncia a definire δ^2.
Osserviamo però che se $u \in C^\infty(\Omega)$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si definisce il prodotto $T_u T$ (o, brevemente, uT) con la formula

$$\langle T_u T, \varphi \rangle = \langle T, u\varphi \rangle \qquad \forall \, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \,.$$

La definizione è ben posta in quanto $u\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Si ha quindi per $u \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$T_u \, \delta = u(0)\delta$$

in quanto per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle T_u \, \delta, \varphi \rangle = \langle \delta, u\varphi \rangle = u(0)\varphi(0) = \langle u(0)\delta, \varphi \rangle \,.$$

In particolare, per $u(x) = x$, si ha $x\delta = 0$, dove l'uguaglianza ha il significato che il prodotto tra la distribuzione associata alla funzione $u(x) = x$ e la distribuzione δ coincide con la distribuzione associata alla funzione nulla.

3.3 Derivate di una distribuzione e Teorema di Malgrange-Ehrenpreis

Definizione 3.3.1. *(Definizione di derivata di ordine β di una distribuzione)*
Sia $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\beta \in \mathbb{N}_0^N$. Si definisce

$$\begin{aligned} D^\beta T : \mathcal{D}(\Omega) &\to \mathbb{C} \\ \varphi \quad &\mapsto \left\langle D^\beta T, \varphi \right\rangle := (-1)^{|\beta|} \left\langle T, D^\beta \varphi \right\rangle \,. \end{aligned}$$

Dalla definizione è facile riconoscere che $D^\beta T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

[14] cfr. **L. Schwartz**: *Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions*, C.R. Acad. Sci. Paris 239, pp. 847–848, 1954.

Osservazione 3.3.2. La Definizione 3.3.1 generalizza la formula di integrazione per parti per funzioni regolari. Infatti, ricordiamo che se $u \in C^1(\mathbb{R})$ risulta

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)\,\varphi'(x)\,d\mathcal{L}^1(x) = -\int_{\mathbb{R}} u'(x)\,\varphi(x)\,d\mathcal{L}^1(x)$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Quindi **nel senso delle distribuzioni** si può **sempre** parlare di derivate di **qualsiasi** ordine di una distribuzione e queste sono **ancora** distribuzioni.

Questa proprietà non ha riscontro nell'ambito delle funzioni e costituisce un valido argomento a favore della teoria delle distribuzioni.

Esempio 3.3.3. Sia $H(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$ (funzione di Heaveside).
Siccome $H \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ calcoliamo T'_H. Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ risulta

$$\langle T_H, \varphi' \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi'(x)\,d\mathcal{L}^1(x) = -\varphi(0) = -\langle \delta, \varphi \rangle\ .$$

Pertanto $T'_H = \delta \notin L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.
Questo esempio mostra che non è detto che le derivate di una distribuzione associata ad una funzione di L^1_{loc} siano ancora funzioni localmente sommabili.

Siamo ora in grado di chiarire (anche da un punto di vista semantico) il concetto di "soluzione fondamentale" dell'operatore di Laplace.

Sia in generale

$$P_\alpha = P_\alpha(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha \qquad (\text{con } a_\alpha \in \mathbb{C})$$

un operatore differenziale a coefficienti costanti di ordine m.

Definizione 3.3.4. $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ si dice <u>soluzione fondamentale</u> per P_α se

$$P_\alpha E = \delta,$$

cioè se

$$\langle P_\alpha E, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$$

o, equivalentemente, se

$$\sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \langle E, D^\alpha \varphi \rangle = \varphi(0) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)\,.$$

Osservazione 3.3.5. Il termine "soluzione fondamentale" è giustificato dal fatto che se $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ è una soluzione fondamentale per P_α ed $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ allora si può provare (si veda il paragrafo 5.5) che $E * f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e si ha

$$P_\alpha(E * f) = (P_\alpha E) * f = \delta * f = f\,,$$

cioè $E * f$ è una soluzione di classe $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ dell'equazione differenziale non omogenea

$$P_\alpha u = f.$$

Riguardo all'esistenza di soluzioni fondamentali, sussiste il seguente notevole risultato:

Teorema 3.3.6. *(Teorema di Malgrange-Ehrenpreis (1954-55))*
Ogni operatore differenziale a coefficienti costanti ha almeno una soluzione fondamentale.

Osservazione 3.3.7. Per quanto riguarda l'operatore di Laplace, osserviamo che per ogni funzione test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, dalla formula di rappresentazione di Green (Teorema 2.6.1, applicato a φ e $x^0 = 0$) si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x)\Delta\varphi(x)\, d\mathcal{L}^N(x) = \varphi(0)\,;$$

ciò mostra che Γ (o meglio, la distribuzione associata a $\Gamma \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$) è una soluzione fondamentale per l'operatore Δ di Laplace nel senso della precedente definizione. Infatti

$$\forall\,\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)\,: \quad \langle \Delta T_\Gamma, \varphi\rangle = \langle T_\Gamma, \Delta\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x)\Delta\varphi(x)\, d\mathcal{L}^N(x) = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle\ .$$

Osservazione 3.3.8. Rinviamo al paragrafo 10.4 per una breve introduzione alle "distribuzioni temperate".