Note di Matematica Vol.I , 261-279 (1981)

ALCUNE OSSERVAZIONI SU UNA CLASSE DI METODI LINEARI MULTISTEP A-STABILI

Carmela PARACELLI (°)

Abstract. *In this note we observe a decreasing property of* $\|F_n\|^2_G$ *along the numerical solution of the autonomous differential system* $\dot{y} = f(y)$ *which satisfies a monotonicity condition; such a solution is obtained by means of a class of linear* k*-step* A*-stable methods and we have set* $F_n = (f^T(y_n), f^T(y_{n+1}), \dots, f^T(y_{n+k-1}))^T$ *and* G *is a symmetric positive definite matrix of order* k.

We study also a particular subclass of linear multistep A*-stable methods of maximum order, in which the matrix* G *is actually constructed. The associated Lyapunov function ensures the stability of the set of equilibrium points.*

INTRODUZIONE.

Negli ultimi anni si sono fatti molti progressi nell'analisi di metodi multistep A stabili per il trattamento numerico di sistemi di equazioni differenziali di tipo "stiff".

(°) Dipartimento di Matematica - Università degli Studi - 73100 Lecce

E' noto che per tali sistemi i metodi classici alle differenze, per essere efficienti, richiedono una limitazione troppo onerosa sul passo di discretizzazione. Muovendosi invece, nell'ambito della teoria della stabilità alla Liapunov si sono ottenuti notevoli sviluppi sia con l'introduzione di metodi multistep espliciti A-stabili non lineari (ved. per es. [4], [5], [6]) sia con l'analisi più approfondita di metodi lineari multistep impliciti A-stabili. (E' noto che un metodo lineare A-stabile non può essere esplicito (ved. [7])).

In un lavoro del 1978 Dalquist prova che la G-stabilità è equivalente alla A-stabilità (ved. [2]).

Alla luce di tale risultato in questa nota si dimostra che, considerando una classe di metodi lineari k-step A-stabili applicata a un sistema differenziabile autonomo monotono, si può costruire una matrice G di ordine k simmetrica e definita positiva e quindi una norma, rispetto alla quale, $F_n = (f_n^T, f_{n+1}^T, \dots, f_{n+k-1}^T)^T$ è decrescente lungo la soluzione numerica.

Successivamente utilizzando questa proprietà si costruisce una classe di metodi A-stabili di ordine massimo e si dimostra che l'insieme dei punti di equilibrio è globalmente stabile in R^s e nel caso di stretta monotonia il punto di equilibrio è globalmente asintoticamente stabile in R^s.

1. FONDAMENTI STORICI.

Siano $\lambda_i(A)$ per $i = 1,\dots,m$ gli autovalori della matrice complessa A di ordine s e sia $<\cdot,\cdot>$ un prodotto scalare in C^s. Sussistono i seguenti teoremi:

TEOREMA 1. *Se* $\mathrm{Re}<Az,z> \leq 0$ *per ogni* $z \in C^s$ *allora* $\mathrm{Re}\,\lambda_i(A) \leq 0$ *per* $i = 1,\dots,m$.

Dim. Indicato con z_i l'autovettore corrispondente all'autovalore $\lambda_i(A)$ si ha:

$$\mathrm{Re} < Az_i, z_i > = \mathrm{Re} < \lambda_i z_i, z_i > = \mathrm{Re}\ \lambda_i \|z_i\|^2 \leq 0$$

dove $\|\cdot\|$ è la norma corrispondente al prodotto scalare considerato.

TEOREMA 2. *Se* A *è in particolare una matrice reale di ordine* s, (.,.) *un prodotto scalare in* R^s *e se* $(Ax,x) \leq 0$ *per ogni* $x \in R^s$ *allora* $\mathrm{Re}\,\lambda_i(A) \leq 0$ *per* $i = 1,\dots,m$.

Dim. Per ogni $z = x+iy$, $w = u+iv$ con $z,w \in C^s$ si ponga

$$< z,w > = (x,u) + (y,v) - i(x,y) + i(y,u).$$

Resta così definito il prodotto scalare $<.,.>$ in C^s e si ha:

$$\mathrm{Re} < Az,z > = (Ax,x) + (y,Ay) \leq 0$$

e quindi per il teorema 1 si ha la Tesi.

Sia $f : R^s \to R^s$ una funzione con derivate parziali prime continue e si denoti con $J(x)$ la matrice Jacobiana della f.

TEOREMA 3. *Se* $(f(x) - f(y), x-y) \leq 0$ *per ogni* $x,y \in R^s$ *allora* $(J(x)u,u) \leq 0$ *per ogni* $x,u \in R^s$.

Dim. Si supponga per assurdo che riesca per qualche x_o ed u_o, $(J(x_o)u_o)u_o > 0$.

Per le ipotesi di continuità esiste $\rho \in R^+$ tale che

$$(J(x)u_o,u_o) > 0 \qquad \text{per ogni } x \in S(x_o,\rho)$$

avendo indicato con $S(x_o,\rho)$ la sfera di centro x_o e raggio ρ .

Preso $\mu \in R$ tale che $\bar{x} = x_o + \mu u_o \in S(x_o,\rho)$ si ha:

$$f(\bar{x}) - f(x_o) = \int_{x_o}^{\bar{x}} J(x)dx = \int_o^1 J(x_o+\mu t u_o)\ \mu u_o\ dt$$

dove $\int_{x_o}^{\bar{x}} J(x)dx$ è l'integrale di linea esteso al segmento di estremi x_o e $\bar{x}$.

Componendo scalarmente con μu_o si ha:

$$(f(\bar{x}) - f(x_o),\mu u_o = \int_o^1 (J(x_o+\mu t u_o)\ \mu u_o,\mu u_o)dt =$$

$$\mu^2 \int_o^1 (J(x_o+\mu t u_o)u_o,u_o)dt > 0 \qquad \textbf{contro l'ipotesi.}$$

Dai Teoremi 1 e 3 discende il corollario seguente:

COROLLARIO 1. *Se* $(f(x) - f(y)\ ,\ x - y) \leq 0$ *per ogni* $x,y \in R^s$ si ha che $Re\ \lambda_i(J(x)) \leq 0$ per ogni $x \in R^s$ e per $i = 1,\dots,m$.

Si consideri ora il sistema di equazioni differenziali ordinarie autonomo

1.1. $$\frac{dy}{dt} = f(y) \quad , \ t \geq t_o$$

con $f : R^s \to R^s$, $f \in C^1$ e tale che soddisfi alla condizione di monotonia

1.2. $$(f(u) - f(v),\ u - v) \leq 0$$

e per ogni $u,v \in R^s$.

Se $y(t)$ e $u(t)$ sono due soluzioni della (1.1) si ha:

1) $$\frac{d}{dt} \| f(y(t)) \|^2 = 2(J(y(t))f,f) \leq 0$$

cioé la $\| f(y) \|$ è una funzione non crescente lungo la traiettoria.

2) $$\frac{d}{dt} \|y(t) - u(t)\|^2 = 2(y(t) - u(t)\ ,\ f(y(t)) - f(u(t))) \leq 0$$

cioé la (1.2) è una condizione necessaria e sufficiente affinché $\|y(t) - u(t)\|$ sia una funzione non crescente di t, per tutte le coppie di soluzioni della (1.1).

Se in particolare f soddisfa alla condizione di stretta monotonia

1.3. $$(f(u) - f(v),\ u - v) \leq -\mu \| u - v \|^2 \qquad \text{con} \qquad \mu > 0$$

e per ogni $u,v \in R^s$, f è bigettiva e bicontinua e l'insieme

$$\Omega = \{ y \in R^s : f(y) = 0 \}$$

si riduce ad un solo punto.

Indicata con $J^*(x)$ la matrice Jacobiana della funzione $g(x) = f(x) + \mu x$, con I la matrice unitaria di ordine s, per la (1.3) risulta $(g(u)-g(v),\ u-v) \leq 0$ per ogni $u,v \in R^s$, e per il teorema 3 $(J^*(x)u,u) = ((J(x) + \mu I)u,u) \leq 0$ e quindi

1.4. $$(J(x)u,u) \leq -\mu \| u\|^2 \qquad \forall\, x,u \in R^s.$$

Inoltre la funzione $V : R^s \to R$ definita da $V(y) = (f(y),f(y))$ è tale che:

a) $V(y) = 0 \quad \forall\, y \in \Omega \quad ; \quad V(y) > 0 \quad \forall\, y \notin \Omega$

b) $\frac{d}{dt} V(y(t)) = 2(J(y)f(y),f(y)) < 0 \quad y \notin \Omega$

dove $y = y(t)$ è una soluzione della (1.1).

Pertanto [1] l'insieme Ω è globalmente asintoticamente stabile in R^s, cioé il punto di equilibrio è globalmente stabile e attrattivo in R^s.

2. RICHIAMI SULLA A E G-STABILITA'.

Si consideri la (1.1) con la condizione (1.2). Il generale metodo lineare a k-passi può scriversi

$$2.1. \qquad \sum_{j=o}^{k} \alpha_j \, y_{n+j} = h \sum_{j=o}^{k} \beta_j \, f_{n+j}$$

dove α_j e β_j sono costanti ed $f_{n+j} = f(y_{n+j})$ per $j=0,..k$.

Il metodo (2.1) sarà nel seguito indicato brevemente con (ρ,σ) dove

$$\rho(\zeta) = \sum_{j=o}^{k} \alpha_j \, \zeta^j \qquad \sigma(\zeta) = \sum_{j=o}^{k} \beta_j \, \zeta^j$$

Con l'aiuto dell'operatore traslazione E, $Ey_n = y_{n+1}$ la (2.1) si può scrivere:

$$\rho(E)y_n = h \, \sigma(E)f_n$$

Si richiamano ora alcune definizioni e risultati ottenuti nella teoria di discretizzazione di Dalquist.

Definizione 1. Un metodo (ρ,σ) si dice A-stabile se

2.2. $$\mathrm{Re}\,\frac{\rho(\zeta)}{\sigma(\zeta)} > 0 \qquad \text{per } |\zeta| > 1$$

Definizione 2. Siano $x_j \in R$ $j = 0,1,\dots$ e posto $X_n = (x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1})^T$ la condizione di G-stabilità si esprime dicendo che esiste una matrice G di ordine k, simmetrica e definita positiva tale che per tutti i numeri reali $x_o, x_1, \dots, x_k$ si abbia

2.3. $$X_1^T\, GX_1 - X_0^T\, GX_o \leq 2\,\sigma(E)x_o \quad \rho(E)x_o.$$

TEOREMA 1. [2] *Ogni metodo A-stabile (ρ,σ) è G-stabile per almeno una matrice G reale simmetrica e definita positiva.*

COROLLARIO 1. *Sia* $\{y_n\}_{n\in N}$ *una arbitraria successione di vettori di* R^s *e* $Y_n = (y_n^T, y_{n+1}^T, \dots, y_{n+k-1}^T)^T$.

Se il metodo (ρ,σ) è A-stabile posto

$$\| Y_n \|_G^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} g_{ij}(y_{n+i-1}, y_{n+j-1})$$

si ha

2.4. $$\| Y_{n+1} \|_G^2 - \| Y_n \|_G^2 \leq 2(\sigma(E)y_n, \rho(E)y_n).$$

TEOREMA 2. *Un metodo lineare multistep esplicito non può essere A-stabile. L'ordine di un metodo lineare multistep implicito* A-*stabile* *non può essere maggiore di due.*

La regola del trapezio è il metodo lineare multistep implicito A-stabile con il più piccolo coefficiente nell'errore di troncamento.

Le condizioni cui deve soddisfare un metodo k-step del secondo ordine sono:

a) $$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j = 0$$

b) $$\sum_{j=0}^{k} \beta_j = \sum_{j=1}^{k} j\,\alpha_j$$

c) $$\sum_{j=1}^{k} j\,\beta_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} j^2 \alpha_j$$

3. ALCUNE CONSIDERAZIONI SUL θ-METODO ED ESTENSIONE A UNA CLASSE DI METODI LINEARI MULTISTEP A-STABILI.

La classe di metodi lineari ad un passo del primo ordine è data da

3.1. $$y_{n+1} - y_n = h\left[(1-\theta) f_{n+1} + \theta f_n \right]$$

usualmente chiamata "θ-metodo".

Tale metodo è A-stabile se e solo se $\theta \leq \frac{1}{2}$ [3]; in particolare per $\theta = 0$ si ritrova il metodo di Eulero, per $\theta = \frac{1}{2}$ la regola del trapezio risultando solo in questo caso del secondo ordine.

Se la f soddisfa alla condizione (1.2) risulta:

3.2. $$\| f_{n+1} \| \leq \| f_n \| \qquad \forall\ n \in N.$$

Infatti componendo scalarmente la (3.1) con $f_{n+1} - f_n$ si ha:

$$0 \geq ((1-\theta)f_{n+1}+\theta f_n, f_{n+1}-f_n) = (2\theta-1)(f_n, f_{n+1}) - \theta\| f_n \|^2 + (1-\theta)\|f_{n+1}\|^2$$

e tenuto conto che $2\theta-1 \geq 0$ e che

$$|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \leq \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2) \qquad \forall\, x,y \in R^s$$

si ha:

$$\frac{1}{2}(\|f_{n+1}\|^2 - \|f_n\|^2) \leq (y_{n+1} - y_n, f_{n+1} - f_n) \leq 0.$$

Se la f è strettamente monotona si ha:

$$3.3. \quad \|f_{n+1}\|^2 - \|f_n\|^2 \leq 2(y_{n+1} - y_n, f_{n+1}-f_n) \leq -2\mu\|y_{n+1}-y_n\|^2 \leq 0.$$

La (3.3) consente di dire che la successione $\{\|f_n\|\}_{n\in N}$ è convergente ed è tale che

$$\|f_n\| \leq \|f_1\| \qquad \forall\, n \in N$$

e quindi la successione $\{y_n\}_{n\in N}$ è limitata. Inoltre si ha:

$$3.4. \qquad \lim_{n\to\infty}\| y_{n+1} - y_n \| = 0$$

Indicato con $\bar{y}$ il limite della successione convergente $\{y_{k_n}\}_{n\in N}$ estratta dalla $\{y_n\}_{n\in N}$ per la (3.4) anche $\{y_{k_n+1}\}_{n\in N}$ converge a $\bar{y}$.

Considerando la (3.1) relativamente alla $\{y_{k_n}\}_{n\in N}$ e passando al limite per $n \to \infty$ segue che necessariamente $\bar{y}$ è il punto di equilibrio e per l'unicità di esso anche $\{y_n\}_{n\in N}$ converge a $\bar{y}$.

Si consideri ora la classe di metodi a k-passi

$$3.5.\qquad y_{n+k} - y_{n+i} = h \sum_{j=o}^{k} \beta_j f_{n+j} \qquad \text{per} \quad 0 \leq i \leq k-1$$

e si ponga $F_n = (f_n^T, f_{n+1}^T, \ldots, f_{n+k-1}^T)^T$.

Si dimostra che se il metodo (3.5) è A-stabile ed f soddisfa alla (1.2), esiste una matrice G di ordine k reale simmetrica e definita positiva tale che:

$$3.6.\qquad \| F_{n+1} \|_G^2 \leq \| F_n \|_G^2 .$$

Infatti componendo scalarmente la (3.5) con $\rho(E)f_n$ si ha:

$$(y_{n+k} - y_{n+i}, f_{n+k} - f_{n+i}) = h(\sigma(E)f_n, \rho(E)f_n) \leq 0$$

ed essendo il metodo A-stabile quindi G-stabile [2] esiste una matrice G simmetrica e definita positiva tale che:

$$\| F_{n+1} \|_G^2 - \| F_n \|_G^2 \leq 2(\sigma(E)f_n, \rho(E)f_n) \leq 0$$

e pertanto è verificata la (3.6).

Si noti che per il θ-metodo è $k = 1$ e $G = 1$.

4. UNA CLASSE DI METODI LINEARI MULTISTEP A-STABILI DEL SECONDO ORDINE.

Si consideri la classe di metodi a k-passi, $k \geq 2$

$$4.1.\quad y_{n+k}-y_{n+i} = h\left[\alpha(f_{n+k}+f_{n+i})+\beta \sum_{j=i+1}^{k-1} f_{n+j}+\gamma \sum_{j=o}^{i-1} f_{n+j}\right], \qquad 0\leq i\leq k-1$$

con la convenzione che le $\sum\limits_{j=n}^{m}$ sono da ritenersi nulle quando $m< n$.

Si vogliono ricercare metodi A-stabili dalla (4.1) e di ordine massimo. Si verifica facilmente che le condizioni

b) $\quad k - i = 2\alpha + \beta(k - i - 1) + \gamma i$

c) $\quad \dfrac{k^2 - i^2}{2} = (k+i)\alpha + \beta \sum\limits_{j=i+1}^{k-1} j + \gamma \sum\limits_{j=1}^{i-1} j$

sono soddisfatte se e solo se $\gamma = 0$ e $2\alpha + (k-i-1)\beta = k-i$.

In questo caso i polinomi $\rho(\zeta)$ e $\sigma(\zeta)$ associati al metodo (4.1) per $i \neq 0$ hanno divisori comuni e pertanto la classe di metodi (4.1) è riconducibile alla seguente classe

$$4.2.\qquad y_{n+k} - y_n = h\left[\alpha(f_{n+k} + f_n) + \beta \sum_{j=1}^{k-1} f_{n+j}\right].$$

Per lo studio di tali metodi si consideri la matrice G reale e simmetrica di ordine k

$$G = \begin{pmatrix} 2\alpha & \beta\dots & \beta & \beta \\ \beta & 2\alpha & \beta & \beta \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta & \beta & \beta & 2\alpha \end{pmatrix}$$

Indicati con Δ_i $i = 1,\dots,k$ i minori principali si vede facilmente che

$$\Delta_i = (2\alpha - \beta)^{i-1} \left[2\alpha + (i-1)\beta\right]$$

e pertanto la matrice G riesce definita positiva se $0 < \beta < 2\alpha$ oppure se $\beta < 0$ e $2\alpha > (1-k)\beta$.

Considerando la $\|\cdot\|_G^2$ già definita precedentemente risulta

$$\| F_{n+1}\|_G^2 - \| F_n \|_G^2 = 2\alpha\left[\sum_{i=1}^{k} \|f_{n+i}\|^2 - \sum_{i=o}^{k-1} \| f_{n+i}\|^2\right] +$$

$$2\beta\left[\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k} (f_{n+1}, f_{n+j}) - \sum_{i=o}^{k-2}\sum_{j=i+1}^{k-1} (f_{n+i}, f_{n+j})\right] = 2\alpha\left[\| f_{n+k}\|^2 - \| f_n\|^2\right] +$$

$$2\beta\left[\sum_{i=1}^{k-1} (f_{n+i}, f_{n+k}) + \sum_{i=1}^{k-2}\sum_{j=i+1}^{k-1} (f_{n+i}, f_{n+j}) - \sum_{i=1}^{k-1} (f_n, f_{n+i}) - \sum_{i=1}^{k-2}\sum_{j=i+1}^{k-1} (f_{n+i}, f_{n+j})\right] =$$

$$2\alpha\left[\| f_{n+k}\|^2 - \| f_n\|^2\right] + 2\beta\left[(f_{n+k}, \sum_{j=1}^{k-1} f_{n+j}) - (f_n, \sum_{j=1}^{k-1} f_{n+j})\right] =$$

$$2(f_{n+k} - f_n, \alpha(f_{n+k} + f_n) + \beta \sum_{j=1}^{k-1} f_{n+j}) = 2(\rho(E)f_n, \sigma(E)f_n) =$$

$$2(y_{n+k} - y_n, f_{n+k} - f_n) \leq 0 \quad \text{per l'ipotesi (1.2).}$$

Si può quindi affermare che i metodi che si ottengono dalla (4.2) sono A-stabili e per essi si ha:

$$\| F_{n+1} \|_G^2 \leq \| F_n \|_G^2 \qquad \forall n \in N$$

Pertanto dalla (4.1) si ottengono metodi A-stabili di ordine massimo per:

$$0 < \beta < 2\alpha \qquad e \qquad 2\alpha+(k-1)\beta = k$$

oppure per

$$\beta < 0 \qquad e \qquad 2\alpha+(k-1)\beta = k.$$

Inoltre se la f soddisfa alla proprietà di stretta monotonia (1.3) si ha:

4.3. $\| F_{n+1} \|^2_G - \| F_n \|^2_G \leq 2(\sigma(E)f_n, \rho(E)f_n) \leq -2\mu \; \| y_{n+k} - y_n \|^2 \leq 0.$

La (4.3) consente di dire che la successione $\{\| F_n \|^2_G\}_{n\in N}$ è convergente ed è tale che

$$\| F_n \|^2_G \leq \| F_1 \|^2_G \qquad \forall n \in N$$

e quindi la successione $\{y_n\}_{n\in N}$ è limitata.

Inoltre si ha

4.4. $$\lim_{n\to\infty} \| y_{n+k} - y_n \| = 0$$

Se $\{y_{p_n}\}_{n\in N}$ è una successione convergente estratta dalla $\{y_n\}_{n\in N}$ risulta per la (4.4) che è convergente allo stesso limite anche la successione $\{y_{p_n+k}\}_{n\in N}$.

Si vede facilmente che si può estrarre dalla $\{y_{p_n}\}_{n\in N}$ una successione $\{y_{h_n}\}_{n\in N}$ tale che le successioni $\{y_{h_n+i}\}_{n\in N}$ per i=

$=0,\ldots,k-1$ siano convergenti.

Posto allora

$$\lim_{n\to\infty} y_{h_n+i} = l_i \qquad i = 0,\ldots,k-1$$

considerando la (4.2) relativamente alle k successioni estratte e passando al limite per $n \to \infty$ si ottiene un sistema omogeneo di k equazioni in k incognite, la cui matrice dei coefficienti è la matrice G.

Il sistema ammette quindi soltanto la soluzione nulla ed essendo $\Omega = \{\bar{y}\}$ ne consegue che

$$l_i = \bar{y} \qquad \text{per } i = 0,\ldots,k-1$$

e che la successione $\{y_n\}_{n\in N}$ definita dalla (4.2) converge al punto di equilibrio.

Osservazione 1. Se si considera la funzione

$$V : y_n \in R^s \to \| F_n \|_G^2 \in R$$

si ha che

$$\forall y \in \Omega : V(y) = 0$$
$$\forall y \notin \Omega : V(y) > 0$$
$$\Delta V = V_{n+1} - V_n = \| F_{n+1} \|_G^2 - \| F_n \|_G^2 < 0$$

lungo la soluzione numerica e pertanto per il teorema di Liapunov [8] l'insieme Ω è globalmente asintoticamente stabile in R^s per l'equazione

(4.2).

Osservazione 2. Tutto quanto si è ottenuto in questa nota porta a congetturare che se le condizioni iniziali soddisfano ad opportuni vincoli di disuguagliannza, se $\rho(1) = 0$ (*) ed f soddisfa alla condizione (1.2) allora un generico metodo k-step A-stabile soddisfa alla stessa proprietà della classe di metodi (4.2).

Osservazione 3. Dalquist [2] ha provato nell'ipotesi (1.2) che se in luogo di un generico metodo k-step A-stabile si considera il corrispondente metodo one-leg

$$4.5. \qquad \sum_{j=o}^{k} \alpha_j \, y_{n+j} = h \, f\left(\sum_{j=o}^{k} \beta_j \, y_{n+j}\right)$$

si ha

$$4.6. \qquad \|Y_{n+1}\|_G^2 \leq \|Y_n\|_G^2$$

ove si è posto $Y_n = (y_n^T, y_{n+1}^T, \ldots, y_{n+k-1}^T)^T$, $y_n = y'_n - y''_n$ e $\{y'_n\}_{n \in N}$, $\{y''_n\}_{n \in N}$ sono due successioni di vettori arbitrari che soddisfano all'equazione (4.5). Simula in tal modo la proprietà (2) di 1.

Si noti però che tali metodi non soddisfano alla (3.6) e viceversa i metodi lineari k-step A-stabili non soddisfano alla (4.6).

5. RISULTATI NUMERICI.

All'equazione $\dot{y} = -y^3$, $y(0) = 1$ si sono applicati i metodi

(*) La condizione $\rho(1) = 0$ è una condizione necessaria come risulta evidente dal l'equazione test $\dot{y}=\lambda y+q$ con $Re\lambda < 0$ e q preso opportunamente.

$$\text{I} \qquad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n)$$

e

$$\text{II} \qquad y_{n+2} = y_n + h\left[\frac{3}{4}(f_{n+2} + f_n) + \frac{1}{2} f_{n+1}\right]$$

usando come predizione il metodo ad un passo A-stabile del 2° ordine [4]

$$y_{n+1} = y_n + \left(1 - \frac{h}{2} f'_n\right)^{-1} h\, f_n.$$

Nella tabella sono riportati in alcuni punti la soluzione teorica, la soluzione approssimata con il metodo I e $\|F_n\|_G^2$ per $h = 0.01$.

Nella tabella 2 ci sono gli analoghi risultati ottenuti con il metodo II.

TABELLA I

RISULTATI OTTENUTI CON IL METODO I.

Punto finale	Soluzione teorica	Soluzione approssimata	$\| F_n \|_G^2$
0.5	0.707106	0.707095	0.124988
1.	0.577350	0.577342	0.037033
1.5	0.500000	0.499994	0.015623
2.	0.447213	0.447209	0.007999
2.5	0.408248	0.408244	0.004629
3.	0.377964	0.377961	0.002915
3.5	0.353553	0.353550	0.001953
4.	0.333333	0.333331	0.001371

TABELLA II

RISULTATI OTTENUTI CON IL METODO II.

Punto finale	Soluzione teorica	Soluzione approssimata	$\| F_n \|_G^2$
0.5	0.707106	0.707077	0.507520
1.	0.577350	0.577327	0.149616
1.5	0.500000	0.499982	0.062962
2.	0.447213	0.447199	0.032188
2.5	0.408248	0.408236	0.018609
3.	0.377964	0.377953	0.011710
3.5	0.353553	0.353543	0.007841
4.	0.333333	0.333324	0.005504

BIBLIOGRAFIA

[1] N.P.BATHIA - G.P.SZEGO,*Stability Theory for Dynamical Systems,* Springer (1970).

[2] G.DALQUIST, G-*Stability is equivalent to* A-*Stability,* BIT 18(1978), 384--401.

[3] J.D.LAMBERT, *Computational methods in ordinary differential equations,* Wiley 1973.

[4] D. TRIGIANTE, *Asymptotic stability and discretization on an infinite interval,* Computing 18, 117-129 (1977), Springer-Verlag.

[5] D.TRIGIANTE, *Stability of difference equations and numerical solutions of differential equations,*IBM,BARI SCIENTIFIC CENTER,G.513-3550, August (1977).

[6] L.GUERCIA - C.PARACELLI, *Classi di metodi multistep* A-*stabili tipo Rosenbrock per la risoluzione di sistemi di equazioni differenziali ordinarie,*da pubblicare sui Rend.Sem.Mat.Univers.Politech.Torino, vol.38,2 (1980).

[7] O.NEVANLINNA - A.H.SIPILA, *A non existence theorem for explicit* A--*stable methods,*Math. of Com. 28, 128 (1974) 1053-1055.

[8] H.J.STETTER, *Analisys of discretization methods for ordinary differential equations,* Springer-Verlag, Berlin Heidelbert New York, 1973.

Lavoro pervenuto alla Redazione l'1 Giugno 1981
ed accettato per la pubblicazione il 22 Giugno 1982
su parere favorevole di L. Gatteschi e A. Pasquali