Note di Matematica Vol. II, 189-212

SUI MOTI UNIVERSALI IN MAGNETO-FLUIDODINAMICA

Giovanna REMORINI (*)

Summary. *In this paper the definition of the universal* MFD *motion is given and a large number of examples of such motions for the class of an homogeneous, viscous, incompressible, electroconductor fluid, with the Hall effect is presented.*

1. INTRODUZIONE.

In idrodinamica uno dei problemi tuttora aperti è quello di determinare i così detti "moti universali" (¹), cioé (cfr.[19]) i campi di velocità che soddisfano le equazioni del moto per tutti i fluidi di una classe, indipendentemente dai valori assunti dalle costanti o dalle funzioni caratteristiche che compaiono nelle equazioni costitutive. L'importanza di tali moti è notevole (come è stato rilevato anche in [19]) in quanto suggeriscono esperimenti nei quali il campo di velocità è noto a priori, per cui l'analisi dei dati sperimentali non viene complicata dalla necessità di

(*) Meccanica Razionale, Facoltà di Ingegneria dell'Università di Pisa - Via Diotisalvi, 2 - 56100 PISA

(¹) Talvolta detti anche "moti controllabili".

determinare contemporaneamente il campo di velocità incognito. Così per esempio per la classe dei fluidi di Navier-Stokes resta da determinare il legame tra la costante caratteristica ν (coefficiente di viscosità cinematica) e la pressione p, noto però il campo di velocità (valido qualunque sia la costante caratteristica ν).

Tale problema è stato formalizzato da Fosdick e Truesdell [19], ma era già stato studiato per la classe dei fluidi di Navier-Stokes da Craig [1], Kampé de Fériet [5], Görtler e Wieghardt [7], Berker [10] (Pag. 4,19,54,102), Pipkin e Yin [12,13], Marris, Aswani [14-18] ed è tuttora oggetto di studio [20-22,25-28].

Prendendo spunto da una osservazione fatta da Mattei in [29] (secondo la quale le rotazioni rigide, le rotazioni viscose, i moti per eliche circolari con una opportuna determinazione del campo magnetico data in [29] sono moti magnetofluidodinamici (MFD) validi qualunque siano i valori dei coefficienti di viscosità cinematica ν, di viscosità magnetica ν_m e di Hall β_H), il presente lavoro si propone di estendere il concetto di moto universale alla magnetofluidodinamica, considerando la classe dei fluidi omogenei, incomprimibili, viscosi (stokesiani-lineari), dotati di conducibilità elettrica finita ed in presenza di effetto Hall e di dare esemplificazione di tali moti MFD.

Tale problema, che per quanto consta all'autrice non è stato formalizzato in MFD, appare non privo di interesse in quanto contribuisce a dare un senso sia fisico che ingegneristico al modello di fluido ideale MFD e agli esperimenti in cui si pensano trascurabili gli effetti dissipativi (considerando $\nu=\nu_m=0$) e di dispersione (considerando $\beta_H=0$).

2. POSIZIONE DEL PROBLEMA.

Nell'ambito delle equazioni MFD non linearizzate si considera un fluido omogeneo, incomprimibile, viscoso (stokesiano-lineare) di viscosità cinematica ν costante, elettroconduttore di conducibilità elettrica σ costante, soggetto a forze di massa non elettromagnetiche che ammettono un potenziale per unità di massa V ed in presenza di effetto Hall. Le equazioni non lineari di base (in unità di Gauss) per il fluido in esame sono:

$$(2.1) \quad \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \underline{v} - \underline{\omega} \wedge \underline{v} + \mathrm{grad}(V - p/\rho - v^2/2) + \frac{1}{4\pi\mu\rho} \mathrm{rot}\, \underline{B} \wedge \underline{B}$$

$$(2.2) \quad \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}(\underline{v} \wedge \underline{B}) + \nu_m \nabla^2 \underline{B} + \beta\, \mathrm{rot}(B \wedge \mathrm{rot}\, \underline{B})$$

$$(2.3) \qquad 0 = \mathrm{div}\, \underline{v}$$

con la condizione:

$$(2.4) \qquad 0 = \mathrm{div}\, \underline{B}$$

dove $\underline{v}$ è il campo di velocità, $\underline{\omega} = \mathrm{rot}\, \underline{v}$ il vortice, μ la permeabilità magnetica (costante), $\underline{B}$ il vettore induzione magnetica, p la pressione, ρ la densità (costante), c la velocità della luce nel vuoto, $\nu_m = c^2/4\pi\mu\sigma$ il coefficiente (costante) di viscosità magnetica, $\beta = c^2 \beta_H / 4\pi\mu$ con β_H coefficiente di Hall.

Prendendo il rotore di ambo i membri della (2.1) si ottiene l'equazione di compatibilità:

$$(2.5) \quad \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \underline{\omega} - \mathrm{rot}(\underline{\omega} \wedge \underline{v}) + \frac{1}{4\pi\mu\rho} \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\, \underline{B} \wedge \underline{B}).$$

Chiameremo in analogia con il caso idrodinamico "moto MFD universale" ogni moto MFD($\underline{v}$,$\underline{B}$) che sia soluzione solenoidale delle (2.2) e (2.5) indipendentemente dai valori assunti dalle costanti caratteristiche (ν,ν_m,β_H) del fluido in esame.

Dalle (2.2) e (2.5) segue che condizione necessaria e sufficiente affinché un moto MFD ($\underline{v}$,$\underline{B}$) sia universale per la classe dei fluidi in esame è che sia soluzione solenoidale del sistema (2.6) - -(2.10):

(2.6) $$0 = \nabla^2 \underline{B}$$

(2.7) $$0 = \mathrm{rot}(\underline{B}\wedge \ \mathrm{rot}\ \underline{B})$$

(2.8) $$\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}(\underline{v}\wedge\underline{B})$$

(2.9) $$0 = \nabla^2\ \underline{\omega}$$

(2.10) $$\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} = \mathrm{rot}(\underline{v}\wedge\underline{\omega}).$$

Dalla (2.7) segue che per i moti MFD universali della classe in esame il campo magnetico non influenza il campo cinetico (per la presenza dell'effetto Hall [2]); inoltre le equazioni (2.9) e (2.10)

([2]) Per la classe dei fluidi omogenei, incomprimibili (stokesiani-lineari), elettroconduttori, soggetti a forze di massa non elettromagnetiche conservative ed in assenza di effetto Hall(β_H=0) la condizione necessaria e sufficiente affinché un moto MFD sia universale è espressa dal sistema formato dalle equazioni (2.6),(2.8),(2.9) e dall'equazione $\frac{\partial\underline{\omega}}{\partial t}=\mathrm{rot}(\underline{v}\wedge\underline{\omega})+\frac{1}{4\pi\mu\rho}\,\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\underline{B}\wedge\underline{B})$ Ovviamente ogni moto MFD universale studiato nel presente lavoro lo è anche per la classe più ampia citata come esempio in questa nota.

sono puramente idrodinamiche ed esprimono la condizione necessaria e sufficiente affinché un moto idrodinamico $\underline{v}$ sia un moto universale per la classe dei fluidi di Navier-Stokes (cfr. [5],[19], [17-22], [25-28])(3). Pertanto basta determinare $\underline{B}$ tale che siano verificate le (2.4), (2.6)-(2.8), essendo $\underline{v}$ un moto idrodinamicamente universale.

Si osservi che, mentre la geometria delle linee di flusso del campo di velocità (del campo magnetico) è la stessa per ogni moto MFD universale non dipendendo da ν, ν_m e β_H, la pressione, che si determina dalla (2.1) per quadrature una volta che siano noti $\underline{v}$ e $\underline{B}$, non dipende per tali moti da ν_m e β_H, ma dipende in generale da ν.

3. MOTI MFD PIANI (4) STAZIONARI UNIVERSALI.

Ricerchiamo le soluzioni delle (2.3),(2.4),(2.6)-(2.10) limitandoci al caso in cui il moto $(\underline{v},\underline{B})$ è stazionario e $\underline{v}$ è un campo di velocità che compete a un moto piano in senso idrodinamico (sia

(3) Marris in [14],[15],[16] usa una definizione più restrittiva di moto idrodinamico universale richiedendo che anche la pressione p sia indipendente da ν; infatti la (2.9) è ivi sostituita da $\nabla^2 \underline{v} = 0$.

(4) Per "moto MFD piano" si intende un moto MFD$(\underline{v},\underline{B})$ tale che il campo di velocità $\underline{v}$ sia quello tipico di un moto piano in senso idrodinamico; d'ora in poi "moto $\underline{v}$" sarà l'abbreviazione di "moto il cui campo di velocità è $\underline{v}$".

$0\,x\,y$ questo piano).

Introdotta la funzione di corrente $\psi(x,y)$ tale che $\underline{v}=\mathrm{grad}\psi\wedge\underline{k}$, le (2.9) e (2.10) si scrivono rispettivamente:

$$(3.1)\qquad 0=\nabla^4\psi\ ,\qquad 0=\frac{D(\psi,\nabla^2\psi)}{D(x,y)}$$

Il problema di determinare le soluzioni di (3.1) in idrodinamica è stato risolto da Kampé de Fériet [5] il quale ha dimostrato che tutte e sole le soluzioni di (3.1) sono i moti a rotore costante, i moti per rette parallele e i moti per cerchi concentrici [5].

Resta pertanto da determinare $\underline{B}$ in modo che siano soddisfatte le (2.4),(2.6),(2.7),(2.8), $\underline{v}$ essendo uno dei moti soluzione di (3.1).

La (2.8) in componenti cartesiane si scrive:

$$(3.2)\qquad 0=\frac{\partial}{\partial y}\left(B_y\frac{\partial\psi}{\partial y}+B_x\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$(3.3)\qquad 0=\frac{\partial}{\partial x}\left(B_y\frac{\partial\psi}{\partial y}+B_x\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$(3.4)\qquad 0=\frac{D(\psi,B_z)}{D(x,y)}\ .$$

Introdotto un sistema di riferimento locale $(P,\underline{t},\underline{n},\underline{k})$ con $\underline{t}=\underline{v}/v$ ed $\underline{n}$ rispettivamente versore tangente e normale principale alla linea di corrente in P e scritto $\underline{B}=B_t\underline{t}+B_n\underline{n}+B_z\underline{k}$, la (2.8) proiettata su $\underline{t},\underline{n},\underline{k}$ si scrive anche:

---

(5) Tale risultato è stato successivamente ritrovato per altra via e generalizzato (cfr. [7], [28]).

(3.5) $$0 = \frac{d}{ds}(vB_n)$$

(3.6) $$0 = \frac{d}{ds}(vB_n) + v\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

(3.7) $$0 = \frac{d}{ds} B_z \ .$$

Pertanto si riconosce che per un moto MFD piano universale lungo le linee di corrente la componente di $\underline{B}$ normale al piano si mantiene costante o al più funzione di z e la componente B_n è inversamente proporzionale al modulo di $\underline{v}$:

(3.8) $B_z = G\,[\psi(x,y),z]$; $B_n = H\,[\psi(x,y);z]\,/v$

con G e H tali che sia verificata la (3.6).

Esaminiamo i seguenti sottocasi:

*1) Se $\underline{B} = B_z\underline{k}$ (con $B_z = B_z(x,y)$ per la (2.4)), la (2.8) si ri-*duce alla (3.4), la (2.7) è identicamente soddisfatta e la (2.6) *si scrive $\nabla^2 B_z = 0$. Il problema si riduce pertanto a trovare le* funzioni $B_z(x,y)$ soluzioni del sistema:

(3.9) $$0 = \nabla^2 B_z \ , \qquad 0 = \frac{D(\psi,B_z)}{D(x,y)}$$

ψ essendo una delle funzioni di corrente determinate in [5].

Si riconosce con facili calcoli che:

1,a) se $\underline{v}$ è un moto per rette parallele, che potremo supporre parallelo all'asse y senza ledere la generalità, cioé se $\psi = ax^3 +$

$+ bx^2 + cx$, l'unica forma che può assumere B_z affinché $(\underline{v},\underline{B})$ sia universale è:

$$B_z = Ax + C; \tag{3.10}$$

1,b) se $\underline{v}$ è un moto per cerchi concentrici, che potremo supporre di centro 0 senza ledere la generalità, cioé se $\psi=ar^2+b\log r+ +cr^2\log r (r=\sqrt{x^2+y^2})$, l'unico $B_z\underline{k}$ compatibile con $\underline{v}$ (per ogni ν,ν_m,β_H) si ha per

$$B_z = A\log r + C; \tag{3.11}$$

1,c) se $\underline{v}$ è un moto irrotazionale, l'unica forma che può assumere B_z affinché $(\underline{v},\underline{B})$ sia universale è:

$$B_z = A\psi + C; \tag{3.12}$$

1,d) se $\underline{v}$ è un moto a rotore costante, con sviluppi analoghi a quelli fatti in [5] si riconosce che oltre alle soluzioni 1,c), le uniche soluzioni sono $\psi=a_1B_z^2 + b_1B_z$, $B_z = Dx + Ey$ (che con un opportuno cambiamento del sistema di riferimento si riconosce essere del tipo 1,a) oppure $\psi= ar^2 + b\log r$, $B_z = A\log r + C$ come in 1,b).

In definitiva si può concludere che *tutti e soli i moti* MFD *piani universali con* $\underline{B}$ *ortogonale al piano sono quelli determinati in* 1,a), 1,b) e 1,c).

2) Se $\underline{B}$ è piano e parallelo al piano 0 x y, introdotta la funzione $\Omega(x,y)$ tale che $B = \text{grad}\,\Omega\wedge\underline{k}$, le (2.6),(2.7) e (2.8) si scri

vono rispettivamente:

$$(3.13) \qquad \nabla^2\Omega = -C$$

$$(3.14) \qquad 0 = \frac{D(\nabla^2\Omega,\Omega)}{D(x,y)}$$

$$(3.15) \qquad \frac{D(\psi,\Omega)}{D(x,y)} = H$$

C ed H costanti ($C \neq 0$ affinché la forza magnetica sia diversa da zero).

Il problema si riduce pertanto a trovare la funzione $\Omega(x,y)$ soluzione di (3.13) e (3.15), ψ essendo una delle funzioni di corrente determinate in [5]. Esaminiamo i vari casi per ψ:

2,a) se $\underline{v}$ è un moto per rette parallele, cioé se $\psi = ax^3+bx^2+cx$, dalla (3.15) segue che Ω necessariamente è della forma:

$$(3.16) \qquad \Omega = yH/\psi'(x) + F(x).$$

Dalla (3.13) con facili calcoli segue che solo per a=b=0 (cioé $\underline{v} = -c\underline{j}$) è possibile che sia $H \neq 0$ (cioé $B_x \neq 0$), mentre qualunque siano a,b,c con a e b non contemporaneamente nulli deve essere $H = 0$, cioé $B_x = 0$ e quindi $\underline{B} = -F'(x)\underline{j}$ è parallelo a $\underline{v}$; inoltre risulta $F(x) = -\frac{1}{2}Cx^2 - Dx - E$.

Pertanto *gli unici moti* MFD *universali con* $\underline{v}$ *moto per rette* *parellele e* $\underline{B}$ *piano* (6) *sono:*

(3.17) $\underline{v} = -c\underline{j} \quad , \quad \underline{B} = A\underline{i} + (Cx + D)\underline{j}$

e

(3.18) $\underline{v} = -(3ax^2 + 2bx + c)\underline{j} \quad , \quad \underline{B} = (Cx + D)\underline{j}$

2,b) se $\underline{v}$ è un moto per cerchi concentrici, cioé se $\psi(r)=ar^2+ b \log r+cr^2 \log r$, introdotto un sistema di coordinate cilindriche r,θ,z di versori $\underline{e}_r,\underline{e}_\theta,\underline{k}$ e introdotta la funzione $\Omega(r,\theta)$ tale che $B = \frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial\theta}\underline{e}_r - \frac{\partial\Omega}{\partial r}\underline{e}_\theta$, dalla (2.8) segue che Ω necessariamente è della forma:

(3.19) $$\Omega = A\frac{r}{\psi'(r)}\theta + g(r) \ .$$

Dalla (2.6) con facili calcoli segue che solo se $b=c=0$ (cioé se $\underline{v}$ è una rotazione rigida) è possibile che sia $A \neq 0$, mentre qualunque siano a,b,c con b e c non contemporaneamente nulli deve essere $A=0$, cioé $B_r = 0$; inoltre risulta $g'(r) = A_1 r+C_1/r$.

---

(6) Con ragionamenti analoghi si dimostra che gli *unici* moti MFD universali con $\underline{v}$ per rette parallele e $\underline{B}$ parallelo al piano $0\,x\,y$, cioé $\underline{B} = \operatorname{grad}\Omega(x,y,z)\wedge\underline{k}$ sono:
$\underline{v} = -c\underline{j}$, $\underline{B} = (A_1 z + C_1)\underline{i} + (Dx+A_2 z + C_2)\underline{j}$
con A_1,C_1,D,A_2,C_2 costanti con $A_1 D=0$ (ovviamente $A_2 \neq 0$ se $A_1=D=0$) e $\underline{v} = -(3ax^2 + 2bx + c)\underline{j}$; $\underline{B} = -\partial g(x,z)/\partial x\underline{j}$
$g(x,z)$ essendo tale che $\nabla^2 g = f(z)$ ed $f(z)$ funzione arbitraria.

Pertanto gli *unici* moti MFD universali con $\underline{v}$ moto per cerchi concentrici e $\underline{B}$ piano sono

$$(3.20)\qquad \begin{aligned} \underline{v} &= -(2ar + \frac{b}{r} + 2cr \log r + cr)\underline{e}_\theta \ , \\ \underline{B} &= (A_1 r + C_1/r)\underline{e}_\theta \end{aligned}$$

e

$$(3.21)\qquad \underline{v} = -2ar\underline{e}_\theta \ , \quad \underline{B} = \frac{A}{2ar}\,\underline{e}_r + (A_1 r + C_1/r)\underline{e}_\theta$$

con A, A_1, C_1 costanti arbitrarie (7).

2,c) Se $\underline{v}$ è un moto a rotore costante non nullo (8), soluzione particolare delle (3.13),(3.15) è $\Omega = A\psi$, cioè $\underline{B} = A\underline{v}$.

3) Le rotazioni viscose (in particolare rigide) $\underline{v} = v(r)\underline{e}_\theta$ sono ammesse come moti MFD universali anche per altri valori del campo magnetico oltre a quelli determinati in 1,b) e 2,b), come ri_sulta da [23],[24], dove sono determinati come moti MFD validi qualunque siano ν, ν_m, β_H:

$$(3.22)\qquad \begin{aligned} \underline{v} &= (2ar + \frac{b}{r} + cr \log r)\ \underline{e}_\theta \ , \\ \underline{B} &= (Ar + \frac{B}{r})\underline{e}_\theta + (C \log r + D)\underline{k} \ . \end{aligned}$$

---

(7) Si può dimostrare che le (3.20) e (3.21) sono gli *unici* moti MFD universali anche nel caso che $\underline{B}$ sia parallelo al piano 0 x Y.

(8) Deve essere $\underline{v}$ a rotore costante non nullo, altrimenti la forza magnetica è nulla: rot $\underline{B} = \nabla^2\Omega\underline{k} = A\nabla^2\psi\underline{k}$.

4. MOTI MFD SPAZIALI STAZIONARI UNIVERSALI.

Ricerchiamo le soluzioni delle (2.3), (2.4),(2.6)-(2.10) nel caso che ($\underline{v}$,$\underline{B}$) sia stazionario, essendo $\underline{v}$ un moto spaziale o equivalentemente ricerchiamo le soluzioni stazionarie delle (2.4),(2.6)-(2.8), $\underline{v}$ essendo un moto spaziale idrodinamicamente universale.

1) *Moti spaziali per rette parallele.*

Con facili conti si riconosce che soluzione delle (2.3), e (2.9) e (2.10) è $\underline{v}=v(x,y)\underline{k}$ con v tale che $\nabla^2 v=\text{cost}$,cioé un qualsiasi moto per rette parallele è un moto idrodinamicamente universale.

Scritto B in componenti cartesiane dalle (2.4),(2.6),(2.8) si ha:

$$
(4.1)\qquad
\begin{aligned}
B_x &= B_x(x,y) \quad ,\\
B_y &= B_y(x,y) \ ,\\
B_z &= zF(x,y) + G(x,y)
\end{aligned}
$$

con $F = -\left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right)$, B_x,B_y,G funzioni armoniche; la (2.7) si scrive:

$$
(4.2)\qquad
\begin{cases}
\underline{B} \cdot \text{grad } B_z = f(z) \\
0 = \frac{\partial}{\partial x}\left[B_x\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[B_y\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\right]
\end{cases}
$$

con f(z) funzione arbitraria.

In particolare esaminiamo i seguenti sottocasi:

1,a) se $\underline{B} = B_z(x,y)\underline{k}$, la (2.7) e la (2.8) sono identicamente verificate e la (2.6) si scrive $\nabla^2 B_z = 0$.

Quindi *tutti e soli* i moti MFD universali con $\underline{v}$ moto per rette parallele e $\underline{B}$ parallelo a $\underline{v}$ sono:

$$(4.3) \qquad \underline{v} = v(x,y)\underline{k} \quad , \quad \underline{B} = B_z(x,y)\underline{k}$$

con $v(x,y)$ e $B_z(x,y)$ tali che $\nabla^2 v = \text{cost}$, $\nabla^2 B_z = 0$.

1,b) Se $B_z = 0$, introdotta la funzione $\phi(x,y)$ tale che $\underline{B} = \text{grad}\phi \wedge \underline{k}$, le (2.6), (2.7) e (2.8) si scrivono rispettivamente:

$$\nabla^2\phi = A, \qquad 0 = \frac{D(\nabla^2\phi,\phi)}{D(x,y)} \quad , \quad 0 = \frac{D(v,\phi)}{D(x,y)}$$

con A costante ($A \neq 0$ affinché sia rot $\underline{B} \neq 0$). Pertanto sono moti MFD universali i moti $v(x,y)\underline{k}$, grad $\phi(x,y)\wedge\underline{k}$, $v(x,y)$ e $\phi(x,y)$ essendo tali che:

$$(4.4) \qquad \nabla^2 v = h, \qquad \nabla^2\phi = A \quad , \quad 0 = \frac{D(v,\phi)}{D(x,y)}$$

h ed A costanti ($A \neq 0$).

La (4.4), oltre al caso particolare $v(x)$ (cioé $\underline{v} = (3ax^2 + 2bx + c)\underline{k}$ moto piano per rette parallele) già esaminato nel N.3 e al caso particolare $v(r)$ (cioé $\underline{v}$ moto di rivoluzione per rette parallele) che esamineremo successivamente al punto 1,c) di questo N.4, ammette come soluzione $\nabla^2 v = h$, $\phi = F[v(x,y)]$ con F tale che $F'(v)h + F''(v)\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] = A$. In particolare se $\nabla^2 v = 0$, con ragionamenti analoghi al [5] si dimostra (con opportuni cambiamenti di assi) che gli *unici* moti MFD universali con $\underline{v}$ irrotazionale per rette parallele e $\underline{B}$ piano ortogonale a $\underline{v}$ sono:

$$\underline{v} = ax\underline{k} \quad , \quad \underline{B} = (Dx + E)\underline{j} \tag{4.5}$$

$$\underline{v} = (a \log r + b)\underline{k}, \ \underline{B} = (Dr + E/r)\underline{e}_\theta \ . \tag{4.6}$$

1,c) Se $\underline{v}$ è un moto di rivoluzione per rette parallele (all'asse z), introdotto un sistema di coordinate cilindriche e scritto $\underline{v} = v(r)\underline{k} = (ar^2 + b \log r + c)\underline{k}$, $\underline{B} = B_r(r,\theta,z)\underline{e}_r + B_\theta(r,\theta,z)\underline{e}_\theta + B_z(r,\theta,z)\underline{k}$, dalle (2.4) e (2.8) si ha:

$$\begin{aligned} &B_r = B_r(r,\theta) \quad , \quad B_\theta = B_\theta(r,\theta) \quad , \\ &B_z = zH(r,\theta) + G(r,\theta) \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial r}\left[rv(r)B_r\right] + v(r)\frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \tag{4.8}$$

con $H = \frac{v'(r)}{v(r)} B_r(r,\theta)$, B_r, B_θ, G funzioni opportune.

Si osservi che, poiché $v'(r) = 2ar + b/r$, se $a=b=0$ (cioé $\underline{v}=c\underline{k}$) necessariamente $B_z = G(r,\theta)$.

Si riconosce con facili calcoli che oltre alla soluzione $\underline{v} = (ar^2 + b \log r + c)\underline{k}$, $\underline{B} = B_z(r,\theta)\underline{k}$ con $B_z(r,\theta)$ tale che $\nabla^2 B_z = 0$ (vedi caso 1,a) di questo N.4), e alla soluzione $\underline{v}=(ar^2+b \log r+$

$+ c)\underline{k}$, $\underline{B} = \text{grad}\,\phi\wedge\underline{k}$ con $\phi(r,\theta)$ tale che $\nabla^2\phi = A(A\neq 0$ costante) (vedi caso 1,b) di questo N. 4), è moto MFD universale:

$$\underline{v} = (ar^2 + b\log r + c)\underline{k}$$

(4.9)

$$\underline{B} = \left(Ar + \frac{C}{r}\right)\underline{e}_\theta + (D\theta + E\log r + F)\underline{k}$$

con $DC = 0$, A e C non contemporaneamente nulli. Infatti se $B_r = 0$, dalle (4.7) e (4.8) si ha $B_\theta = B_\theta(r)$ e $B_z = G(r,\theta)$; la (2.6) si scri ve:

$$0 = \frac{1}{r}B'_\theta(r) + B''_\theta(r) - \frac{1}{r^2}B_\theta \quad , \qquad 0 = \nabla^2 B_z$$

da cui $B_\theta(r) = Ar + C/r$; la (2.7) si scrive:

$$\frac{Ar^2 + C}{r^2}\;\frac{\partial B_z}{\partial\theta} = \text{cost}$$

da cui, oltre al caso $A = C = 0$ (cioé $B_\theta = B_r = 0$) già esaminato, se A e C non sono contemporaneamente nulli si trova come soluzione la (4.9).

2) *Moti di risoluzione.*

Sia $\underline{v}$ un moto di rivoluzione, cioé, introdotto un sistema di coordinate cilindriche avente per asse z l'asse rivoluzione, sia $\underline{v} = v_r(r,z)\underline{e}_r + v_z(r,z)\underline{k}$. Introdotta la funzione $\psi(r,z)$ tale che $v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}$, $v_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}$ e posto $D^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$, si ha:

$$\underline{\omega} = \frac{1}{r}D^2\psi\underline{e}_\theta \quad , \qquad \nabla^2\underline{\omega} = \frac{1}{r}D^4\psi\underline{e}_\theta \ ,$$

$$\text{rot }(\underline{v}\Lambda\underline{\omega}) = \frac{D(\psi, D^2\psi/r^2)}{D(r,z)} \ \underline{e}_\theta \ .$$

Pertanto $\underline{v}$ è soluzione delle (2.9) e (2.10) (cioé è un moto idrodinamicamente universale) se e solo se:

$$(4.10) \qquad 0 = \frac{D(\psi, D^2\psi/r^2)}{D(r,z)} \ , \qquad 0 = D^4\psi$$

La (4.10) ammette come soluzioni $\psi = \psi(r)$ (cioé $\underline{v} = -\frac{\psi'(r)}{r}\underline{k}$ moto di rivoluzione per rette parallele); oppure $\frac{D^2\psi}{r^2} = A$ con A costante arbitraria. Marris e Aswani [18] dimostrano che tutti e soli i moti di rivoluzione rotazionali idrodinamicamente universali sono quelli per rette parallele e quelli per i quali è costante il rapporto ω/r.

Tralasciando il caso $\psi = \psi(r)$ già esaminato nel caso 1,c) di questo N.4, cerchiamo le soluzioni delle (2.6)-(2.8), $\underline{v}$ essendo tale che $D^2\psi = Ar^2$.

2,a) Se $\psi = \psi(z)$, risulta $D^2\psi = \psi''(z)$ e la prima delle (4.10) si scrive $\psi'(z)\ \psi''(z) = 0$ da cui si ha $\psi(z) = az + c$ cioé $\underline{v} = \frac{a}{r}\underline{e}_r$ è un moto piano irrotazionale per rette concorrenti (vedi N. 3).

2,b) Soluzione di $D^2\psi = Ar^2$ è in particolare $\psi = az+br^4+cr^2$; in tal caso $\underline{v} = \frac{a}{r}\underline{e}_r - (4br^2 + 2c)\underline{k}$, $\underline{\omega} = 8br\ \underline{e}_\theta$ e la (2.8) si scrive:

$$0 = \frac{D(\Psi, B_\theta/r)}{D(r,z)} \ , \qquad 0 = \frac{D(\Psi, rB_r)}{D(r,z)} \ ,$$

$$0 = \frac{D(\psi, B_z)}{D(r,z)} - 8br^2 B_r$$

e con facili calcoli si trova che in particilare è moto MFD universale:

(4.11)
$$\underline{v} = \frac{a}{r}\,\underline{e}_r - (4br^2 + 2c)\underline{k}$$
$$\underline{B} = \frac{C}{r}\,\underline{e}_r + Dr\,\underline{e}_\theta + E\underline{k}$$

con $bC = 0$. e $D \neq 0$.

2,c) Soluzione di $D^2\psi = Ar^2$ in particolare è $\psi = br^2(a^2-r^2-z^2)$, cioé il vortice di Hill (cfr. [10], Pag. 54) è un moto idrodinamicamente universale. In tal caso imponendo che siano verificate le (2.6)-(2.8) si trova che se $B_z = 0$ anche $B_r=0$ e che è un moto MFD universale:

(4.12)
$$\underline{v} = 2brz\,\underline{e}_r + 2b(2r^2+z^2-a^2)\underline{k}.$$
$$\underline{B} = Ar\,\underline{e}_\theta$$

anzi è *l'unica* soluzione possibile con $\underline{B} = \underline{B}(r)$ [9].

(9) Si noti che i moti di Hill hanno un interesse effettivo in MFD (cfr. [11]).

3) *Moti per eliche circolari.*

Sia $\underline{v}$ un moto per eliche circolari di Strakhovitch, cioé (cfr. [10] Pag. 101) sia $\underline{v} = f(r)\,\underline{e}_\theta + g(r,\theta)\underline{k}$ con:

$$f(r) = ar \log r + br + c/r,$$

$$g(r,\theta) = a_1 \log r + b_1 r^2 + c_1 + \sum_k e^{k\theta}\, h_k(r)$$

le $h_k(r)$ essendo soluzioni dell'equazione differenziale:

$$0 = h''(r) + \frac{1}{r}\, h'(r) + \left[\frac{k}{r^2} - \frac{kf(r)}{\nu r}\right] h.$$

Si osservi che se $f(r) = 0$ si ha un moto per rette parallele all'asse z e se $g(r,\theta) = 0$ si ha un moto piano per cerchi concentrici.

Chiaramente condizione necessaria affinché un moto di Strakhovitch per eliche circolari sia idrodinamicamente universale è che $h_k = 0$ qualunque sia k, cioé $g = g(r) = a_1 \log r + b_1 r^2 + c_1$ e quindi:

$$\underline{v}(r) = (ar \log r + br + c/r)\underline{e}_\theta +$$

$$+ (a_1 \log r + b_1 r^2 + c_1)\underline{k}\,. \tag{4.13}$$

Si verifica con facili calcoli che qualunque siano a, b, c, a_1, b_1, c_1, la (4.13) verifica le (2.9) e (2.10), cioé il moto Strakhovitch (4.13) è un moto idrodinamicamente universale.

Scritto $\underline{B} = \underline{B}(r,\theta,z)$ in componenti cilindriche, la (2.8) si scrive:

$$
(4.14) \qquad \begin{cases} 0 = \frac{1}{r} f(r) \frac{\partial}{\partial \theta} B_r + g(r) \frac{\partial}{\partial z} B_r \\ 0 = f(r) \frac{\partial}{\partial z} B_z - g(r) \frac{\partial}{\partial z} B_\theta + \frac{\partial}{\partial r} \left[f(r) B_r \right] \\ 0 = \frac{\partial}{\partial r} \left[r\, g(r) B_r \right] - f(r) \frac{\partial}{\partial \theta} B_z + g(r) \frac{\partial}{\partial \theta} B_\theta . \end{cases}
$$

Chiaramente soluzione particolare della (4.14) è $B_r = 0, B_\theta(r)$, $B_z(r)$ e con facili conti si trova che sono soddisfatte anche le (2.6) e (2.7) per $B_\theta(r) = Ar + C/r$, $B_z(r) = D \log r + E$, cioé:

$$
(4.15) \qquad \begin{aligned} \underline{v} &= (ar \log r + br + c/r)\underline{e}_\theta + (a_1 \log r + \\ &\quad + b_1 r^2 + c_1)\underline{k}, \\ \underline{B} &= (Ar + C/r)\underline{e}_\theta + (D \log r + E)\underline{k} \end{aligned}
$$

è un moto MFD universale (cfr. anche [29]).

3,a) Se $B_r = 0$ dalla (2.8) si ha

$$
f(r)\, B_z(r,\theta,z) - g(r)\, B_\theta(r,\theta,z) = H(\theta)
$$

con $H(\theta)$ funzione arbitraria.

Con facili calcoli si riconosce che, oltre alla (4.15), sono moti MFD universali:

$$\underline{v} = (ar \log r + br + c/r)\underline{e}_\theta + (a_1 \log r + b_1 r^2 + c_1)\underline{k} \tag{4.16}$$
$$\underline{B} = B_z(r,\theta)\underline{k}$$

con $B_z(r,\theta)$ tale che $\nabla^2 B_z = 0$.

3,b) Se $\underline{B} = \underline{B}(r)$, la (2.8) si scrive:

$$0 = \frac{d}{dr}\left[f(r)\, B_r(r)\right] \quad , \quad 0 = \frac{d}{dr}\left[rg(r)\, B_r(r)\right]$$

la quale, oltre alla soluzione $B_r = 0$ (vedi 3,a) di questo N. 4), ammette per $c=b_1=0$, $a=ha_1$, $b=hc_1$ come soluzione $B_r = \dfrac{H}{(a \log r + b)r}$.

Imponendo che siano verificate anche le (2.6) e (2.7) si trova che un moto MFD universale è:

$$\underline{v} = br\,\underline{e}_\theta + c_1\underline{k} \tag{4.17}$$
$$\underline{B} = \frac{D}{r}\underline{e}_r + (Ar + \frac{C}{r})\underline{e}_\theta + E\underline{k}$$

$A \neq 0$ affinché sia rot $\underline{B} = 0$.

5. CONCLUSIONI.

Al N.2 di questo lavoro si dà la definizione di moto MFD universale e si scrivono le equazioni che caratterizzano i moti MFD universali per la classe dei fluidi in esame.

Ai N. 3 e N. 4 si dà una larga esemplificazione di tali moti [vedi le (3.10), (3.11), (3.12), (3.17), (3.18), (3.20), (3.21), (3.22), (4.5), (4.6), (4.9), (4.11), (4.12), (4.13), (4.15),(4.16) e (4.17)] tra i quali compaiono moti significativi in MFD come le rotazioni viscose, i moti di Hill, i moti per eliche circolari ed in alcuni casi (vedi 1), 2,a), 2,b) del N. 3 ed 1,a), 1,b), 2,c) del N. 4) si danno tutti i moti MFD universali dei sottinsiemi pre si in considerazione.

BIBLIOGRAFIA

[1] T. CRAIG: *On certain possible cases of steady motion in a viscous fluid*, Amer.J.Math. 3(1880), 269-293.

[2] J.W.STRUTT: *On the motion of a viscous fluid*, Phil.Mag.26(1913), 776-786 ≡ Papers 6,187-196.

[3] V.CRUDELI: *Le formule di Cauchy e i fluidi viscosi*, Atti R. Accad. Lincei (Rendiconti) Ser. V, vol. XXVII(1918), 49-52.

[4] A.MASOTTI: *Osservazioni sui moti di un fluido nei quali è stazionaria la distribuzione del vortice*, Att. R.Accad. Lincei (Rendiconti) Ser. 6, vol. VI(1927), 224-228.

[5] M.J.KAMPE DE FERIET: *Sur quelques cas d'intégration des équations du mouvement plan d'un fluide visqueux incompressible*, Ann. Soc. Sci. Bruxelles (A) 50(1930), 77-80.

[6] G.HAMEL: *Über die potentialströmungen zäher flüssigkeiten*, Z. Angew. Math. Mech. 21(1941), 129-139.

[7] H.GÖRTLER, K. WIEGHARDT: *Über eine gewise klasse von strömungen zäher flüssigkeiten und eine keunzeichnung der Poiseuille-Strömung*, Mathematische Zeitschrift 48(1942),247-250.

[8] C. TRUESDELL: *The kinematics of vorticity*, Indiana University Press. Bloomington (1954), 1-204.

[9] C. TRUESDELL, R. TOUPIN:*The classical field theories*, Handbuch der Physik, III/1 (1960), Berlin-Göttingen-Heidelberg:Springer, 226-793.

[10] R.BERKER: *Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible*, Handbuch der Physik, VIII/2 (1963), Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer, 1-384.

[11] V.C.A. FERRARO, C.PLUMPTION: *An introduction to magneto-fluid mechanics*, Clarendon Press. Oxford (1966), 1-254.

[12] A.C.PIPKIN: *Controllable viscometric flow*, Quart. Appl. Math. 26(1968), 87-100.

[13] W.L.YIN. A.C.PIPKIN: *Kinematics of viscometric flow*, Arch.Rat. Mech. Anal. 37(1970), 111-135.

[14] A.W.MARRIS: *Steady non rectilinear complex-lamellar universal motions of a Navier-Stokes fluid*, Arch.Rat.Mech. Anal. 41 (1971), 354-362.

[15] A.W.MARRIS: *Steady rectilinear universal motions of a Navier-Stokes fluid*, Arch. Rat. Mech. Anal. 48(1972), 379-396.

[16] A.W.MARRIS: *Steady universal motions of a Navier-Stokes fluid: the case when the velocity magnitude is constant on a Lamb surface*, Arch.Rat.Mech.Anal. 50(1973), 99-110.

[17] A.W.MARRIS: *On complex lamellar motions*, Arch.Rat.Mech.Anal. 59(1975), 131-148.

[18] M.G.ASWANI, A.W.MARRIS: *On the general impossibility of controllable axi-symmetric Navier-Stokes motions*, Arch.Rat.Mech. Anal. 63(1977), 107-153.

[19] R.L.FOSDICK, C.TRUESDELL: *Universal flows in the simplest theories of fluids*, Annali Scuola Normale Sup. Pisa Cl. Sci. Sez. IV, vol. IV(1977), 323-341.

[20] W.F.AMES, A.W.MARRIS: *Addendum: on complex lamellar motions*, Arch. Rat. Mech. Anal. 64(1977), 371-379.

[21] A.W.MARRIS, M.P. STALLYBRASS: *Some new exact solutions of the Navier-Stokes equations associated with steady vortex flows*, Letters Appl. Eng. Sciences 5(1977), 359-366.

[22] A.W.MARRIS, M.P. STALLYBRASS: *A class of fluid motions obtained by superposition*, Atti Acc. Sci. Torino Cl. Sci. Fis.Mat. Nat. 113(1979), 53-60.

[23] G.MATTEI: *Sulle rotazioni rigide in meccanica dei plasmi*, Atti Acc. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Sez.VIII, vol. LXVII(1979), 404-407.

[24] G.MATTEI: *Sulle rotazioni viscose in meccanica dei plasmi*, Atti Acc. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Sez. VIII, vol. LXIX (1980), 142-146.

[25] S.N. PRASAD, P.J.THAKUR: *Two dimensional universal motions of Navier-Stokes fluids*, Math. Educ. Sect. A 14(1980), 1-7.

[26] S.N.PRASAD, P.J.THAKUR: *Axially symmetrical universal motions*

of Navier-Stokes fluids, Math. Educ. Sect. A 14(1980),15-24.

[27] S.N.PRASAD, P.J.THAKUR: *Rotationally symmetrical universal motions of Navier-Stokes fluids*, Math. Educ. Sect. A 14(1980), 35-45.

[28] A.W.MARRIS: *Remarks on plane universal Navier-Stokes motions*, Arch. Rat. Mech. Anal. 77(1981), 95-102.

[29] G.MATTEI: *Sui moti per eliche circolari in meccanica dei plasmi*, In corso di stampa sugli Atti Acc. Naz. Lincei.

Lavoro pervenuto alla Redazione il 17 Novembre 1982
ed accettato per la pubblicazione il 22 Marzo 1983
su parere favorevole di S.Rionero e R.Nardini