Note di Matematica Vol. III, 297-306

PUNTI DOPPI ISOLATI NON NORMALI DI SUPERFICI DI $\mathbb{P}^4$ (*)

Alessandro DI SANTE (**)

Abstract. *In this note we establish some properties concerning non proper double points of the first and second kind of a surface in* $\mathbb{P}^4$*, without assuming that the surface is a projection from* $\mathbb{P}^5$ *to* $\mathbb{P}^4$ *of an algebraic irreducible non singular surface. In particular we show that these points are not normal ones.*

1) Sia F una superficie algebrica di $\mathbb{P}^4$.

Un punto doppio isolato P di F si dice improprio quando la sezione di F con un generico iperpiano per P ha genere uguale a quello di una generica sezione iperpiana non passante per P.

Si dimostra, [11], che, dette corde improprie di F per P le rette per P che sono limiti di corde di F, il punto doppio P è improprio se tutte le ∞^3 rette per P sono corde improprie, mentre è proprio (cioé non improprio) se le corde improprie per P sono tutte e sole le rette per P che appartengono ad un determinato $\mathbb{P}^3$.

E' noto, [11], che se P è un punto doppio improprio di una superficie F di $\mathbb{P}^4$ il cono osculatore a F in P è riducibile in due piani che diremo tangenti a F in P.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

(**) Istituto di Matematica - Via Mezzocannone, 8 - NAPOLI -

In questa nota esamino i casi in cui tali due piani abbiano in comune soltanto il punto P o una retta per P.

Nel primo caso il punto doppio si dice di $1^{\underline{a}}$ specie, nel secondo di $2^{\underline{a}}$ specie.

In due mie note precenti, [3],[4], mi sono occupato principalmente di punti doppi impropri che si generano per proiezione di una superficie algebrica irriducibile non singolare del $\mathbb{P}^5$ sul $\mathbb{P}^4$, dimostrando, tra l'altro, che sono punti non normali.

In questa nota compio un ulteriore progresso dimostrando che sono non normali anche i punti doppi impropri di $1^{\underline{a}}$ e $2^{\underline{a}}$ specie di superfici del $\mathbb{P}^4$ che non risultino necessariamente per proiezione di una superficie algebrica non singolare del $\mathbb{P}^5$ sul $\mathbb{P}^4$.

Un esempio notevole a questo riguardo si trova in [10], Cap.VII.

2) Sia F una superficie irriducibile di $\mathbb{P}^4$ non singolare al di fuori di un punto V, dove si suppone che abbia un punto doppio con cono tangente formato da due piani distinti α_1, α_2 tali che $\alpha_1 \cap \alpha_2 = \{V\}$, quindi un punto doppio improprio di $1^{\underline{a}}$ specie, ([1], pag. 212; [11], pag. 38).

Consideriamo il "blow-up" $\widetilde{\mathbb{P}}^4$ di $\mathbb{P}^4$ in V, col morfismo canonico $\Pi : \widetilde{\mathbb{P}}^4 \to \mathbb{P}^4$ ed indichiamo con E il divisore eccezionale su $\widetilde{\mathbb{P}}^4$, cioè $E = \Pi^{-1}(V)$.

Si sa che E è isomorfo a $\mathbb{P}^3$ e che esiste una identificazione canonica di E con $\mathbb{P}(T_V(\mathbb{P}^4))$ che dà l'isomorfismo menzionato (cfr.[7], pagg. 182-185).

Sia ora $\widetilde{F}$ la trasformata propria di F mediante Π^{-1} (cfr. [7], pag. 474); si sa che $\tilde{F} \cap E$, mediante la identificazione $E \simeq \mathbb{P}(T_V(\mathbb{P}^4))$, è proprio il cono proiettivo tangente a F in V (cfr. [7], pag. 475). Così $\tilde{F} \cap E = C_1 \cup C_2$, dove C_1 e C_2 sono curve razionali non singolari su E, corrispondenti ai due piani α_1, α_2 in cui il cono tangente ad F in V è spezzato. Ovviamente, essendo $\alpha_1 \cap \alpha_2 = \{V\}$, è $C_1 \cap C_2 = \Phi$.

TEOREMA I. "*La superficie* F *non è normale in* V".

Dim. Consideriamo il morfismo birazionale

$$\omega : \Pi_{/\tilde{F}} : \tilde{F} \to F.$$

Dato che $\omega^{-1}(V) = C_1 \cup C_2$ non è connesso, F non è normale in V per il Z.M.T. (cfr. [8] pag. 280, e [7] pag. 53).

Osservazione 1^. Chiaramente l'argomentazione del Teorema I si applica anche se F è non singolare al di fuori di un numero finito di punti doppi con cono tangente riducibile in due piani che generano $\mathbb{P}^4$.

Una argomentazione simile sarebbe valida per dimostrare che, più in generale, se F è una varietà algebrica irriducibile in $\mathbb{P}^n$, con un punto singolare isolato V, con cono tangente in V riducibile e formato da almeno due componenti, e tale che le sue componenti si intersecano solo in V, non è normale in V.

Studiamo ulteriormente la superficie $\tilde{F}$ ed il morfismo $\omega : \tilde{F} \to F$.

Dimostriamo il

LEMMA I: " $\tilde{F}$ *è una desingolarizzazione di* F".

Dato che ω è un isomorfismo di $\tilde{F} - \Pi^{-1}(V)$ su $F - \{V\}$, è chiaramente sufficiente dimostrare che $\tilde{F}$ è non singolare in $C_1 \cup C_2$. Questo segue immediatamente dalla ben nota proprietà che afferma: "Sia $x \in X \subset Y$. Se x è semplice per X e X è, localmente in x, l'intersezione di Y con una ipersuperficie, allora x è semplice per Y". $\tilde{F}$ gode della proprietà in ogni punto di $\Pi^{-1}(V)$ per definizione di "blow-up".

Sia ora $\mathscr{C} : F' \to F$ la normalizzazione di F, per la proprietà universale della normalizzazione c'è un unico morfismo $\Psi : \tilde{F} \to F'$ tale che il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd} \tilde{F} \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[dr, "\omega"'] & & F' \arrow[dl, "\mathscr{C}"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

$\mathscr{C}$ è un isomorfismo tra $F' - \mathscr{C}^{-1}(V)$ ed $F - \{V\}$ e Ψ è un isomorfismo tra $\tilde{F} - \omega^{-1}(V)$ ed $F' - \mathscr{C}^{-1}(V)$.

TEOREMA II. " $\mathscr{C}^{-1}(V)$ *è formato da due punti distinti*".

Dim. Dato che $\mathscr{C}$ è un morfismo finito, $\mathscr{C}^{-1}(V)$ è formato da un insieme finito di punti, che sono in corrispondenza biunivoca con i rami analitici di F in V (cfr. [5] pag. 49). Così, dato che V è un punto doppio per F, il numero di tali rami non è maggiore di due (cfr. [6] oppure osserviamo che ogni ramo ha molteplicità di intersezione almeno 1 con ogni piano per il punto, se ce ne stessero più di 2, allora tale molteplicità sarebbe almeno 3). Inoltre, se $\mathscr{C}^{-1}(V)$

fosse un sol punto, avremmo un assurdo, applicando lo Z.M.T. al morfismo birazionale Ψ, dato che $\Psi^{-1}(\mathscr{C}^{-1}(V)) = \omega^{-1}(V) = C_1 \cup C_2$ e $C_1 \cap C_2 = \Phi$. In tal modo $\mathscr{C}^{-1}(V)$ ha esattamente due punti distinti. Indichiamo con V_1 e V_2 i due punti di $\mathscr{C}^{-1}(V)$. Poniamo allora $H'' = \omega_* H_F$, e dimostriamo il

LEMMA II. *Su* $\tilde{F}$ *vale:* (a) $C_1 \cdot C_2 = 0$, (b) $C_1 \cdot H'' = C_2 \cdot H''=0$, (c) $C_1^2 + C_2^2 = -2$":

Dimostrazione. (a) e (b) sono ovvie. Dimostriamo la (c), ponendo $C = C_1 + C_2$. Se H_F è tale che $V \in H_F$ ed H_F ha in V un punto doppio con rette tangenti distinte è $H_F^2 - 2 = (H'' - C)^2 = H''^2+C^2-2H''C = H_F^2 + C^2$. Quindi è $C^2 = -2$ e la (c) segue dalla (a).

LEMMA III. "*Se* X *è una superficie non singolare,* E *è una curva razionale non singolare su* X, D *è un divisore effettivo irriducibile su* X *tale che* $E \cdot D = 0$ *e* $h^0(X, L(D)) \geq 3$, *allora* $E^2 < 0$".

Dimostrazione. Supponiamo $E^2 \geq 0$. Per la formula di aggiunzione su X, abbiamo $(K_X - hE) \cdot E = K_X \cdot E - hE^2 = -2 - (h+1)E^2 < 0$, per ogni $h \in \mathbb{N}$. In tal modo è $K_X < 0$.

Per il T.R.R. su X è: $h^0(X, L(mE)) \geq \frac{1}{2}(mE - K_X)(mE) + p_a(X) + 1 =$

$$= p_a(X) + 1 + \frac{m(m+1)E^2}{2} + m,$$ ed allora esiste un $m \in \mathbb{N}$ tale che:

$h^0(X, |mE|) \geq 2$. Sia ora P un punto di X tale che esiste un fascio Σ di curve di $|D|$, tale che quasi ogni curva di Σ sia irriducibile. Dato che esiste una curva $\hat{E} \in |mE|$ contenente P, e dato che $\hat{E} \cdot D = (mE) \cdot D = 0$, $\hat{E}$ dovrebbe contenere quasi ogni curva di Σ, il che è assurdo.

Ora possiamo dimostrare il:

TEOREMA III. "C_1 e C_2 *sono divisori eccezionali di* $1^{\underline{a}}$ *specie sulla* $\tilde{F}$".

Dimostrazione. Su $\tilde{F}$ è $h^o(\tilde{F}, L(H")) \geq 3$ e quasi ogni divisore di $|H"|$ è irriducibile. Per il LEMMA III è $C_1^2 < 0$, $C_2^2 < 0$, applicando la (c) al LEMMA II, abbiamo $C_1^2 = C_2^2 = -1$. Il teorema segue dal Criterio di Castelnuovo-Enriques.

Osservazione 2ª. E' da notare che il teorema III segue anche dal LEMMA II e dal fatto che se C è una curva contraibile a un punto, allora $C^2 < 0$ (cfr. [9] pag. 49).

COROLLARIO. "F' *è non singolare*".

Dimostrazione. Per il Criterio di Castelnuovo-Enriques esiste un morfismo $f : \tilde{F} \to F"$ tale che F" è una superficie non singolare ed $\tilde{F}$ è isomorfa, tramite la f, al "blow-up" di F" in due punti distinti; in tal modo $\tau : \psi \circ f^{-1} : F" \to F'$ è una trasformazione birazionale che per il Z.M.T., non ha punti fondamentali su F". (cfr. [8], pag. 410).

Dato che allo stesso modo, τ^{-1} non ha punti fondamentali su F', τ è un isomorfismo, così F' è non singolare come lo è F" (cfr. [8], pag. 21).

Osservazione 3ª. Chiaramente le argomentazioni che abbiamo usato fino a qui si applicano a far vedere, più in generale, che, se F è una superficie con un punto doppio isolato V, con cono tangente formato da due piani che si intersecano solo in V, la normalizzazio ne $\mathscr{C}: F' \to F$ è tale che $\mathscr{C}^{-1}(V)$ è formata da due punti distinti che sono non singolari per F'.

Consideriamo ora il divisore $H' = \mathscr{C}_* H_F$ su F', e dimostriamo che

TEOREMA IV. "H' *è ampio su* F' ".

Dimostrazione. Si ha $H'^2 = H_F^2 > 0$. Inoltre, se D è un qualsiasi divisore effettivo irriducibile su F', dato che F' è non singolare, D è una sottovarietà irriducibile di dimensione 1 su F'. Dato che $\mathscr{C}$ è un morfismo, che è un isomorfismo al di fuori di V_1 e V_2, $\mathscr{C}(D)$ è una curva su F. Così $H' \cdot D = H_F \cdot \mathscr{C}(D) > 0$, H_F essendo sezione iperpiana su F. Per il Criterio Nakai-Moishezon (vedi [8], pag. 365) il teorema è vero.

Osservazione 4ª. Alcuni dei risultati di questo numero sono collegati con quelli ottenuti da C. Cumino nella sua nota [2], specialmente la prop. 3 e il cor. 1 pag. 97.

3) Sia F una superficie irriducibile di $\mathbb{P}^4$ non singolare al di fuori di un punto V che sia un punto doppio improprio di 2^ specie avente quindi cono tangente formato da due piani distinti α_1 e α_2 tali che $\alpha_1 \cap \alpha_2 = \{s\}$, dove s è una retta per V. Consideriamo il "blow-up" $\tilde{\mathbb{P}}^4$ di $\mathbb{P}^4$ in V e manteniamo le stesse notazioni del n. 2).

Si ha $\tilde{F} \cap E = r_1 \cup r_2$. Si sa che in V hanno origine due falde lineari che si trasformano in due falde su $\tilde{F}$ aventi origine in r_1 ed r_2, rette corrispondenti agli intorni di V su α_1 e α_2. Siccome α_1 e α_2 hanno una retta in comune, r_1 ed r_2 hanno un punto comune che indichiamo con S, il quale risulta doppio per la superficie trasformata ed è, naturalmente, l'immagine di un punto doppio infinitamente vicino a V nella direzione della retta s, (cfr. [3]). Il cono tangente in S ad $\tilde{F}$ è costituito da due piani Π_1 e Π_2 che intersecano E nelle due rette r_1 ed r_2.

Consideriamo il morfismo birazionale $\omega : \Pi_{/\tilde{F}} : \tilde{F} \to F$. ω è un isomorfismo di $\tilde{F} - \Pi^{-1}(V)$ su $F - \{V\}$.

TEOREMA I. "$\tilde{F}$ *è non singolare in* $r_1 \cup r_2 - \{S\}$".

Dimostrazione. Sia $P \in r_1$ e $P \neq S$, dimostriamo che non è singolare per $\tilde{F}$. La dimostrazione è analoga a quella del LEMMA I,n.2).

TEOREMA II. "S *è un punto doppio isolato di* $\tilde{F}$ *e* $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \{S\}$".

Dimostrazione. Un iperpiano generico H per la retta s sega la F in una curva C con un punto doppio infinitamente vicino a V, precisamente C ha un tacnodo in V(cfr. [3], [4]). La trasformata propria di H mediante Π^{-1} sega $\tilde{F}$ nella trasformata propria $\tilde{C}$ di C, la quale ha un nodo in S, per cui S è un punto doppio isolato di $\tilde{F}$.

Dato che $\Pi_1 \cap E = r_1$ e $\Pi_2 \cap E = r_2$ ed essendo $r_1 \neq r_2$, si riconosce immediatamente che Π_1 e Π_2 non possono intersecarsi lungo una retta contenuta in E. Analogamente si esclude che $\Pi_1 \cap \Pi_2 = r$ con $r \not\subset E$. Se fosse così, dato che r è tangente a $\tilde{F}$, troveremmo una curva C su $\tilde{F}$ che sarebbe tangente ad r. La curva C proverrebbe da una curva di F che godrebbe della proprietà che ogni ipersu perficie del $\mathbb{P}^4$ per essa intersecherebbe la superficie F in una curva con due punti doppi infinitamente vicini a V, che sarebbe allora un oscnodo o una cuspide di 3ª specie, ma ciò è escluso (vedi [3],[4]).

Siamo arrivati così alla conclusione che S è un punto doppio improprio di 1ª specie (vedi [1], [11]), di $\tilde{F}$, ritornando quindi al caso precedente.

Per le notazioni e i simboli, per altro ormai di uso comune, mi sono attenuto ai testi [7] e [8].

BIBLIOGRAFIA

[1] E.BERTINI: "*Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*". Pisa E. Spoerri 1907.

[2] C.CUMINO: "*Sulla seminormalità delle superfici algebriche*". Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 58(1977).

[3] A.DI SANTE: " *Osservazioni sui punti doppi impropri di una superficie del* $\mathbb{P}^4$". Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. Soc. Naz. Sc. Let. A Napoli. Serie IV, vol. XLIV, 1977.

[4] A.DI SANTE: "*Ancora sui punti doppi impropri di una superficie di* $\mathbb{P}^4$". Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. Soc. Naz. Sc. Let. A Napoli, Serie IV, vol. XLVII, 1980.

[5] S.GRECO: "*Normal varieties*" (Notes written with the collaboration of A. DI SANTE). Ist. Naz. Alta Mat. "Institutiones Mathematicae" Vol. IV.

[6] S.GRECO: "*On the theory of Branches*". Proc. Int. Symp. Alg.Geometry, Kyoto 1977, 311-327.

[7] P.GRIFFITHS e J.HARRIS: "*Principles of algebraic geometry*" "Pure and applied mathematics series" Wiley-Interscience, 1978.

[8] R.HARTSHORNE: "*Algebraic Geometry*" Graduate Texts in Math. Springer Verlag 1977.

[9] H.B.LAUFER: "*Normal 2-dimensional singularities*" Annals of Math. Studies. Princeton Univ. Press.

[10] J.G.SEMPLE e L.ROTH: "*Introduction to algebraic geometry*" Oxford (Clarendon Press) 1949.

[11] F.SEVERI: "*Intorno ai punti doppi impropri di una superficie dello spazio a quattro dimensioni e ai suoi punti tripli apparenti*". Rend. Circ. Mat. Palermo t. XV 1901.

Lavoro pervenuto alla Redazione l'8 Aprile 1983
ed accettato per la pubblicazione il 30 Maggio 1984
su parere favorevole di S. Greco e di E. Marchionna