Note di Matematica Vol.III, 131-140 (1983)

GEODETICHE RISPETTO AD UNA PSEUDOCONNESSIONE DI UNO SPAZIO FIBRATO VETTORIALE (*)

Innocente CANDELA (**)

Summary. *We can define a σ-geodetic of a pseudoconnection of a vector bundle and we find properties analogous to those of a geodetic of a linear pseudoconnection on a differentiable manifold.*

INTRODUZIONE. Sia M una varietà differenziabile di classe C^∞ e dimensione n. Si indichino con T(M) il fibrato vettoriale tangente, con $\pi : T(M) \to M$ la proiezione canonica, con $\mathscr{F}(M)$ l'algebra delle funzioni reali differenziabili su M e con $\mathscr{X}(M)$ l'algebra delle sezioni differenziabili di T(M).

Siano V uno spazio vettoriale reale di dimensione r ed E uno spazio fibrato vettoriale di fibra tipo V, di base M e proiezione canonica π'(cfr. [1]). Si indichi con $\mathfrak{G}$(M) l'$\mathscr{F}$(M)-modulo delle sezioni differenziabili di E.

In [2] è stata definita una pseudoconnessione di uno spazio fibrato vettoriale mediante l'assegnazione di un omomorfismo $A:E \to T(M)$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale di Ricerca "Geometria delle varietà differenziabili e generalizzazioni".

(**) Dipartimento di Matematica - Università - BARI.

di spazi fibrati vettoriali, detto B-omomorfismo [1], e di un $\mathcal{F}(M)$-omomorfismo $\nabla : \sigma \to \nabla_\sigma$ di $\mathfrak{S}(M)$ nell' $\mathcal{F}(M)$-modulo degli R-endomorfismi di $\mathfrak{S}(M)$ tale che

$$\forall f \in \mathcal{F}(M), \quad \forall \sigma, \tau \in \mathfrak{S}(M) : \nabla_\sigma f\tau = f\nabla_\sigma \tau + (A\circ\sigma)(f)\tau$$

Per le pseudoconnessioni di spazi vettoriali si è pervenuto a definire il trasporto parallelo di fibre lungo curve opportune dello spazio base e si sono trovate proprietà analoghe a quelle delle pseudoconnessioni lineari su una varietà differenziabile di classe C^∞ [3].

In questa nota nel n. 1 si introduce la nozione di σ-geodetica rispetto ad una pseudoconnessione di E, si mette in evidenza che, quando $E = T(M)$, una σ-geodetica è una geodetica rispetto ad una pseudoconnessione lineare di M.

Nel n. 2 si studia localmente una σ-geodetica, trovando un sistema di equazioni che la rappresenti. Si dà un teorema di esistenza e di unicità di una σ-geodetica e si caratterizzano le pseudoconnessioni di E che ammettono le stesse σ-geodetiche.

1. GEODETICHE RISPETTO AD UNA PSEUDOCONNESSIONE DI UNO SPAZIO FIBRATO VETTORIALE.

Siano M una varieta differenziabile di classe C^∞ e dimensione n, $T(M)$ il fibrato vettoriale tangente, $\pi : T(M) \to M$ la proiezione canonica, $\mathcal{F}(M)$ l'algebra delle funzioni reali differenziabili su M e $\mathcal{X}(M)$ l'algebra delle sezioni differenziabili di $T(M)$, ossia l'algebra dei campi vettoriali differenziabili su M.

Siano V uno spazio vettoriale reale di dimensione r, E uno spazio fibrato vettoriale di fibra tipo V, di base M e proiezione canonica

$\pi' : E \to M$ e $\mathfrak{S}(M)$ l'$\mathcal{F}(M)$-modulo delle sezioni differenziabili di E.

Si dà la seguente definizione:

Definizione 1. Siano (A,∇) una pseudoconnessione di E, $\gamma : I \to M$ una curva differenziabile di classe C^1 su M, con I intervallo chiuso di R, e $\sigma = (\sigma(t))_{t\in I}$ una sezione differenziabile di E su γ tale che

$$(1) \qquad \forall t \in I : A(\sigma(t)) = \dot{\gamma}(t)$$

Si dice che la curva γ è una *σ-geodetica rispetto alla pseudoconnessione* (A,∇), o più semplicemente γ è una σ-geodetica, se la sezione σ è parallela rispetto a se stessa, ossia se risulta:

$$(2) \qquad \forall t \in I : \nabla_{\sigma(t)} \sigma = 0.$$

Osservazione 1. Si può osservare che una σ-geodetica è una curva ammissibile per la pseudoconnessione (A,∇) [2].

Osservazione 2. Per $E = T(M)$ è noto [2] che la pseudoconnessione (A,∇) è una pseudoconnessione lineare su M. In questo caso, una sezione differenziabile di T(M) su una curva $\gamma : I \to M$, $X=(X(t))_{t\in I}$, è un campo di vettori differenziabile lungo γ e una X-geodetica rispetto ad una pseudoconnessione di T(M) è una X-geodetica rispetto ad una pseudoconnessione lineare su M [4].

Fissati una base $(e_i)_{1\leq i\leq r}$ di V e un aperto non vuoto U di M, sia $\rho : U \times V \to \pi'^{-1}(U)$ un B-isomorfismo. Per ogni $i \in \{1,\dots,r\}$, indicata con ε_i la sezione di E su U così definita:

$$\forall p \in U : \varepsilon_i(p) = \rho(p,e_i),$$

per ogni $p \in U$, la famiglia $(\varepsilon_i(p))_{1\leq i\leq r}$ é una base della fibra su p, E_p. La famiglia $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq r}$ è una base dell' $\mathscr{F}(U)$-modulo libero delle sezioni differenziabili di E su U, $\mathfrak{S}(U)$, detta base associata a (U,ρ) e alla base $(e_i)_{1\leq i\leq r}$ di V.

LEMMA 1. *Siano* $\gamma : I \to M$ *una curva ammissibile per la pseudo-connessione* (A,∇) *e* $\mu : I' \to I$ *un diffeomorfismo, con* I *e* I' *intervalli chiusi di* R.

La curva $\gamma' = \gamma \circ \mu$ *è ammissibile per* (A,∇).

Dimostrazione. Sia $\sigma = (\sigma(t))_{t\in I}$ una sezione differenziabile di E su γ tale che sia soddisfatta la (1). Considerata la curva

$$\gamma' = \gamma \circ \mu : I' \to M,$$

si ha:

$$\forall t' \in I' : \dot{\gamma}'(t') = \frac{d\mu(t')}{dt'} \dot{\gamma}(\mu(t')). \tag{3}$$

Posto $\sigma' = (\frac{d\mu(t')}{dt'} \sigma(\mu(t')))_{t'\in I'}$, σ' è una sezione differenziabile di E su γ' e, per la (3), si ha:

$$\forall t'\in I' : A(\sigma'(t')) = A(\frac{d\mu(t')}{dt'} \sigma(\mu(t'))) = \frac{d\mu(t')}{dt'} A(\sigma(\mu(t'))) =$$

$$= \frac{d\mu(t')}{dt'}\ \dot{\gamma}(\mu(t')) = \dot{\gamma}'(t').$$

Pertanto γ' è ammissibile per (A,∇).

LEMMA 2. *Siano* $\gamma : I \to M$ *una* σ*-geodetica rispetto alla pseudo connessione* (A,∇) *e* $\mu : I' \to I$ *un diffeomorfismo, con* I *e* I' *intervalli chiusi di* R, *tale che* $\frac{d\mu}{dt'}$ *non sia mai nulla su* I'.

Considerate la curva $\gamma' = \gamma\circ\mu$ *e la sezione differenziabile di* E *su* γ' $\sigma' = (\frac{d\mu(t')}{dt'}\ \sigma(\mu(t')))_{t'\in I'}$, *risulta:*

$$\forall t' \in I' : \nabla_{\sigma'(t')}\ \sigma' = (\frac{d\mu(t')}{dt'})^{-1}\ \frac{d^2\mu(t')}{dt'^2}\sigma'(t'). \tag{4}$$

Dimostrazione. Per ogni $t'\in I'$, esiste un intorno aperto U di $\gamma'(t')$ e un B-isomorfismo $\rho : U\times V \to \pi'^{-1}(U)$. Fissata una base $(e_i)_{1\leq i\leq r}$ di V, sia $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq r}$ la base associata a (U,ρ) e alla base $(e_i)_{1\leq i\leq r}$.

Indicate con σ^i le componenti di σ rispetto a (U,ρ) e alla base $(e_i)_{1\leq i\leq r}$, con σ'^i quelle di σ' e con Γ^k_{ij} quelle di ∇, tenendo conto di (2) e (3), si ha:

$$\nabla_{\sigma'(t')}\sigma'^i = (\sigma'(t')\sigma'^j(t')\Gamma^k_{ij}(\gamma'(t')) + \frac{d\sigma'^k(t')}{dt'})\varepsilon_k(\gamma'(t')) =$$

$$= ((\frac{d\mu(t')}{dt'})^2\sigma^i(\mu(t'))\sigma^j(\mu(t'))\Gamma^k_{ij}(\gamma(\mu(t')))+(\frac{d\mu(t')}{dt'})^2\ \frac{d\sigma^k(\mu(t'))}{d\mu} +$$

$$+\sigma^k(\mu(t'))\ \frac{d^2\mu(t')}{dt'^2})\varepsilon_k(\gamma(\mu(t'))) =$$

$$= (\frac{d\mu(t')}{dt'})^2(\sigma^i(\mu(t'))\sigma^j(\mu(t'))\Gamma^k_{ij}(\gamma(\mu(t')))+ \frac{d\sigma^k(\mu(t'))}{d\mu})\varepsilon_k(\gamma(\mu(t')))+$$

$$+ \frac{d^2\mu(t')}{dt'^2}\ \sigma^k(\mu(t'))\varepsilon_k(\gamma(\mu(t'))) = \frac{d^2\mu(t')}{dt'^2}\ \sigma(\mu(t')) =$$

$$= \frac{d^2\mu(t')}{dt'^2}\ (\frac{d\mu(t')}{dt'})^{-1}\ \sigma'(t').$$

Si dimostrano facilmente le seguenti proposizioni:

PROPOSIZIONE 1. *Sia* $\gamma : I \to M$ *una* σ*-geodetica, con* I *intervallo chiuso di* R , *e sia* h *una trasformazione affine di* R, *ossia* $h : t \to \alpha t + \beta$, *con* $\alpha \in R^*$ *e* $\beta \in R$.

Indicati con $I' = h^{-1}(I)$ *e con* $\mu : I' \to I$ *l'applicazione definita, per ogni* $t' \in I'$, *da* $\mu(t') = h(t')$, *la curva* $\gamma' = \gamma \circ \mu$ *è una* σ'*-geodetica, ove* $\sigma' = (\alpha\sigma(\mu(t')))_{t'\in I'}$.

PROPOSIZIONE 2. *Sia* $\gamma : I \to M$ *una* σ*-geodetica tale che, per ogni* $t \in I$, $\sigma(t)$ *sia non nullo e sia* $\mu : I' \to I$ *un diffeomorfismo, con* I *e* I' *intervalli chiusi di* R.

Considerate la curva $\gamma' = \gamma \circ \mu$ *e la sezione di* E *su* γ'

$\sigma' = (\frac{d\mu(t')}{dt'}\ \sigma(\mu(t')))_{t'\in I'}$, *se la curva* γ' *è una* σ*-geodetica, esistono* $\alpha \in R^*$ *e* $\beta \in R$ *tali che, per ogni* $t' \in I'$, *risulti* $\mu(t') = \alpha t' + \beta$.

2. - EQUAZIONI DI UNA GEODETICA.

Sia $\gamma : I \to M$ una σ-geodetica rispetto alla pseudoconnessione (A,∇). Siano (U,ϕ), con $\phi = (x^1,\ldots,x^n)$, una carta di M tale che $\gamma(I)\cap U = \emptyset$, $\rho : U \times V \to \pi'^{-1}(U)$ un B-isomorfismo e $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq r}$ la base di $\mathfrak{S}(U)$ associata a (U,ρ) e ad una base $(e_i)_{1\leq i\leq r}$ di V.

Per ogni $i \in \{1,\ldots,r\}$, posto $A_i = A\circ\varepsilon_i$, A_i è un campo vettoriale differenziabile su U.

Con le stesse notazioni precedenti, per ogni $t \in I\cap \gamma^{-1}(U)$, risulta: $\sigma(t) = \sigma^i(t)\varepsilon_i(\gamma(t))$, per cui si ottiene:

$$A(\sigma(t)) = A(\sigma^i(t)\varepsilon_i(\gamma(t))) = \sigma^i(t)A(\varepsilon_i(\gamma(t))) = \sigma^i(t)A_i(\gamma(t))$$

e dalla (1) segue:

$$\sigma^i(t)A_i(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t). \tag{5}$$

Posto, per ogni $i \in \{1,\ldots,r\}$, $A_i(\gamma(t)) = A_i^j(\gamma(t))(\frac{\partial}{\partial x^j})\gamma(t)$ e, per ogni $j \in \{1,\ldots,n\}$, $\gamma^j(t) = x^j(\gamma(t))$, la (5) diventa:

$$A_i^j(\gamma(t))\sigma^i(t) = \frac{d\gamma^j(t)}{dt} , \qquad 1 \leq j \leq n. \tag{6}$$

Dalla (2) segue inoltre:

$$(\sigma^i(t)\sigma^j(t)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) + \frac{d\sigma^k(t)}{dt})\varepsilon_k(\gamma(t)) = 0,$$

per cui deve essere:

$$\sigma^i(t)\sigma^j(t)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) + \frac{d\sigma^k(t)}{dt} = 0 , \quad 1 \leq k \leq r. \tag{7}$$

Pertanto si ha la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 3. *Siano* $\gamma : I \to M$ *una curva differenziabile di classe* C^1, *con* I *intervallo chiuso di* R , *e* $\sigma = (\sigma(t))_{t\in I}$ *una sezione differenziabile di* E *su* γ.

La curva γ *è una* σ-*geodetica se e solo se, per ogni carta* (U,ϕ) *tale che* $\gamma(I)\cap U = \emptyset$ *e per ogni* B-*isomorfismo* $\rho : U \times V \to \pi'^{-1}(U)$, *sono soddisfatte le seguenti condizioni:*

$$(8) \quad A^j_i(\gamma(t))\sigma^i(t) = \frac{d\gamma^j(t)}{dt}, \ \forall t\in I\cap\gamma^{-1}(U), \quad 1 \le j \le n,$$

$$(9) \quad \sigma^i(t)\sigma^j(t)\Gamma^k_{ij}(\gamma(t)) + \frac{d\sigma^k(t)}{dt} = 0, \ \forall t\in I\cap\gamma^{-1}(U), \ 1\le k\le r,$$

che prendono il nome di equazioni della σ-*geodetica* γ *rispetto alla carta* (U,ϕ) *e al* B-*isomorfismo* ρ.

Dalle (8) e (9), per un noto teorema di esitenza e di unicità sui sistemi di equazioni differenziali, consegue la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 4. *Sia* (A,∇) *una pseudoconnessione di* E. *Per ogni* $p_o \in M$ *e per ogni* $v_o \in E_{p_o}$, *esistono un'unica curva differenziabile* $\gamma : I \to M$, *con* I *intervallo chiuso di* R *tale che* $0\in I$, *e un'unica sezione differenziabile* $\sigma = (\sigma(t))_{t\in I}$ *di* E *su* γ *tali che* γ *sia una* σ-*geodetica rispetto alla pseudoconnessione* (A,∇), $\gamma(0) = P_o$ *e* $\sigma(0) = v_o$.

La curva γ *dicesi* σ-*geodetica rispetto alla pseudoconnessione* (A,∇) *con condizione iniziale* (p_o,v_o).

Si ha anche la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 5. *Due pseudoconnessioni di* $E,(A,\nabla)$ *e* (A',∇'), *hanno le stesse geoedetiche se e solo se risulta* $A = A'$ *e, per ogni carta* (U,ϕ) *di* M *e per ogni* B*-isomorfismo* $\rho : U\times V \to \pi'^{-1}(U)$, *indicate con* Γ^k_{ij} *le componenti di* ∇ *rispetto a* (U,ρ) *e ad una base* $(e_i)_{1\leq i\leq r}$ *di* V *e con* Γ'^k_{ij} *quelle di* ∇', *si ha:*

$$\Gamma^k_{ij} + \Gamma^k_{ji} = \Gamma'^k_{ij} + \Gamma'^k_{ji} .$$

Dimostrazione. Si considerino un punto $p\in M$, una σ-geodetica $\gamma : I \to M$ passante per $p = \gamma(t_o)$, con $\sigma = (\sigma(t))_{t\in I}$, una carta (U,ϕ) di M tale che $p\in U$ e un B-isomorfismo $\rho : U\times V \to \pi'^{-1}(U)$.

Se (A,∇) e (A',∇'), pseudoconnessioni di E, hanno le stesse geodetiche, indicate con A^j_i le componenti di A rispetto a (U,ϕ) e al B-isomorfismo ρ, con A'^j_i quelle di A', con Γ^k_{ij} quelle di ∇ e con Γ'^k_{ij} quelle di ∇', dalle (8) e (9) si ottengono le seguenti relazioni:

$$A^j_i(p)\sigma^i(t_o) = A'^j_i(p)\sigma^i(t_o), \quad 1 \leq j \leq n, \tag{10}$$

$$\sigma^i(t_o)\sigma^j(t_o)\Gamma^k_{ij}(p) = \sigma^i(t_o)\sigma^j(t_o)\Gamma'^k_{ij}, \quad 1\leq k\leq r. \tag{11}$$

Per l'arbitrarietà di p e della σ-geodetica γ, dalle (10) e (11) conseguono rispettivamente:

$$A = A', \quad \Gamma^k_{ij} + \Gamma^k_{ji} = \Gamma'^k_{ij} + \Gamma'^k_{ji} .$$

Il viceversa è immediato.

Osservazione 3. Le proposizioni 3,4,5 sono generalizzazioni di analoghe proposizioni relative a pseudoconnessioni lineari su una varietà differenziabile.

BIBLIOGRAFIA

[1] PHAM MAU QUAN: "*Introduction à la géométrie des variétés différentiables*", Dunod, Paris (1969).

[2] I. CANDELA: "*Pseudoconnessioni di uno spazio fibrato vettoriale*", Note di Matematica, Vol. 2, Fasc. 1 (Lecce) (1982).

[3] C. DI COMITE: "*Pseudoconnessioni lineari su una varietà differenziabile di classe* C^∞", Annali di Mat. pura ed appl., Serie IV, T. LXXXIII (1969).

[4] C.DI COMITE: "*Geodetiche rispetto ad una pseudoconnessione lineare su una varietà differenziabile*", Le Matematiche, Vol.XXX, Fasc. 2 (Catania) (1975).

Lavoro pervenuto alla Redazione il 26 Luglio 1983
ed accettato per la pubblicazione il 20 Settembre 1983
su parere favorevole di A. Cossu e C. Di Comite