Note di Matematica, Vol.IV, 97-111(1984)

SULLA NOZIONE ASTRATTA DI DENSITA' IN N* E SUL PROBLEMA DELLA PRIMA CIFRA DECIMALE.

R. GIULIANO ANTONINI (*)

0. Introduzione. E' un risultato sperimentalmente accertato che, se siamo in presenza di un insieme abbastanza ampio di dati numerici (ad es. dati statistici), la frequenza f_k con cui la cifra k (k=1,...,9) compare come prima cifra significativa (tra i numeri appartenenti a questo insieme) non è data, come ci attenderemmo, dal valore $f_k = 1/9$, bensì, approssimativamente, dal valore

$$f_k = \log_{10}(1 + 1/k) \qquad (k=1,\dots,9).$$

Parecchi autori hanno cercato di dare una spiegazione teorica di questo risultato sperimentale. Citiamo, fra gli altri, R.S.PINKHAM [1], R.BUMBY-E.ELLENTUCK [2], R.A.RAIMI [3], R. SCOZZAFAVA [4], A.FUCHS-G.LETTA [5], A.FUCHS-Ph.NANOPOULOS [6] (**)

Come osservano A.Fuchs e G.Letta in [5], la prima questione che si pone a proposito di ogni problema di questo tipo consiste nell'introdurre, in modo più o meno naturale, una funzione d'insieme finitamente additiva (definita su una famiglia abbastanza ampia di parti di $\mathbb{N}^*$) (***) che permetta di dare un senso alle probabilità (legate ad un numero "scelto a caso" in $\mathbb{N}^*$), che costituiscono l'oggetto del problema.

Ciò porta ad introdurre la nozione di "densità" nell'insieme N*, e questo è ciò che viene fatto, in particolare, negli

---

(*) Istituto di Matematica "L.Tonelli" - Via Buonarroti, 2 - PISA

(**) Per un'ulteriore bibliografia sull'argomento, si può consultare R.A.RAIMI [3].

(***) Con il simbolo $\mathbb{N}^*$ si denota l'insieme dei numeri naturali strettamente positivi.

articoli di A.FUCHS-G.LETTA [5] e A.FUCHS-Ph.NANOPOULOS [6] da una parte, e R.SCOZZAFAVA [4] dall'altra.

Nei primi due lavori il problema viene risolto facendo uso della nozione di densità "analitica", nel terzo per mezzo di quella di densità "logaritmica" ad essa associata (questa terminologia verrà chiarita nel §1).

Siamo così condotti, in modo naturale, ad analizzare i rapporti fra la densità analitica e la densità logaritmica associata.

Nel presente articolo si mostra come assegnata una parte E di $\mathbb{N}^*$, che goda di certe proprietà, peraltro abbastanza generali, le due densità coincidano su E.

Il contesto in cui ci si pone è un po' più ampio di quello richiesto dal problema della prima cifra decimale. Precisamente, si introduce la nozione di densità analitica generalizzata e quella di densità logaritmica ad essa associata, e si dimostra la coincidenza delle due densità su un'opportuna classe di sottoinsiemi di $\mathbb{N}^*$.

Il risultato riguardante l'insieme dei numeri che "cominciano" per un'assegnata cifra k rientra in questo contesto come caso particolare.

Desidero ringraziare il Prof.G.Letta, che mi ha proposto questo argomento di studio, per l'aiuto fornitomi durante la stesura del lavoro.

1. Sulla nozione astratta di densità in $\mathbb{N}^*$.

(1.1) DEFINIZIONE. Sia data una famiglia $(\mu_x)_{x\in X}$ di leggi σ-additive in $\mathscr{P}(N^*)$, e un filtro $\mathscr{F}$ sull'insieme degli indici. Si supponga che risulti

$$\lim_{x,\mathscr{F}} \mu_x\{n\} = 0$$

per ogni elemento n di $\mathbb{N}^*$.

Sotto queste ipotesi, si chiama *densità* generata dalla coppia $((\mu_x)_{x\in X},\mathscr{F})$ (o, più semplicemente, da $(\mu_x)_{x\in X}$, nel caso in cui sia chiaro qual è il filtro $\mathscr{F}$ sull'insieme X), la funzione definita da

$$\delta(A) = \lim_{x,\mathscr{F}} \mu_x(A)$$

nella classe $\mathscr{A}$ costituita da tutte le parti A di $\mathbb{N}^*$ per le quali tale limite esiste.

ESEMPI.

(1.2) *La densità asintotica*

Consideriamo, per ogni intero m strettamente positivo, la misura (σ-additiva) π_m su $\mathbb{N}^*$, che assegna massa unitaria a ciascuno dei punti $1,2,\ldots,m$. Sia Π_m la legge di probabilità ottenuta normalizzando π_m. La densità generata dalla famiglia $(\Pi_m)_{m\geq 1}$ viene detta *densità asintotica.*

(1.3) *La densità analitica.*

Questa densità è definita abitualmente nel modo seguente.

Si considera, per ogni numero reale x strettamente positivo, la legge di probabilità P_x definita da

$$P_x\{n\} = \frac{1}{\zeta(1+x)}\,\frac{1}{n^{1+x}}$$

(dove ζ rappresenta la funzione di Riemann).

Se con $\mathscr{F}$ denotiamo il filtro degli intorni destri di 0, la densità generata dalla coppia $((P_x)_{x>0},\mathscr{F})$ viene detta *densità analitica.*

Esiste poi un'altra caratterizzazione della densità analitica, dovuta a Ph. NANOPOULOS [7].

Consideriamo, per ogni numero reale x strettamente positivo, la legge di probabilità Q_x definita nel modo seguente:

$$Q_x\{n\} = (n)^{-x} - (n+1)^{-x}$$

per ogni intero n strettamente positivo.

Si ha allora il seguente

(1.4) TEOREMA. *Sia* A *una parte di* $\mathbb{N}^*$, *e consideriamo, per ogni numero reale* x *strettamente positivo, il numero* $Q_x(A)$ *(dove* Q_x *è la legge di probabilità su* $\mathbb{N}^*$, *definita sopra).*

Affinché A *ammetta densità analitica, è necessario e sufficiente che, quando* x *tende a* 0 *per valori strettamente positivi,* $Q_x(A)$ *ammetta limite; questo limite coincide allora con la densità analitica di* A.

Per la dimostrazione, si rimanda a A.FUCHS-G.LETTA [5].

(1.5) *La densità analitica generalizzata.*

La caratterizzazione di Nanopoulos della densità analitica è suscettibile della seguente generalizzazione.

Sia $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ una funzione crescente, non limitata, con $\phi(1) = 1$.

Per ogni numero reale x strettamente positivo, denotiamo con Q_x la legge di probabilità su $\mathbb{N}^*$ definita da

$$Q_x\{n\} = [\phi(n)]^{-x} - [\phi(n+1)]^{-x}$$

per ogni intero n strettamente positivo.

Se con $\mathcal{F}$ denotiamo ancora il filtro degli intorni destri di 0, la densità generata dalla coppia $((Q_x)_{x>0}, \mathcal{F})$ verrà detta *densità analitica generalizzata*, associata a ϕ; nel seguito essa verrà indicata con δ_ϕ.

(1.6) *La densità logaritmica.*

Sia μ una misura positiva su $\mathbb{N}^*$, di massa totale infinita. Per ogni intero $r > 1$, tale che la misura $I_{[1,r[}.\mu$ non sia nulla, denotiamo con P_r la corrispondente misura normalizzata. La densità generata dalla famiglia $(P_r)_{r>1}$ verrà detta *densità logaritmica.*

Si noti che, per ogni misura positiva μ su $\mathbb{N}^*$, di massa totale infinita, resta individuata una ed una sola funzione ϕ con le proprietà richieste in (1.5), tale che sia

$$\mu\{n\} = \log \frac{\phi(n+1)}{\phi(n)}$$

per ogni intero n strettamente positivo.

Questa osservazione ci permetterà di collegare le due nozioni di densità analitica generalizzata e di densità logaritmica, e rende anche ragione della denominazione assegnata a quest'ultima; parleremo anzi di densità logaritmica associata alla densità analitica generalizzata δ_ϕ .

Il caso particolare in cui è $\mu\{n\} = \log(1+1/n)$ (cioé il caso della densità logaritmica associata alla densità analitica, definita in (1.3)) è quello preso in esame in R.SCOZZAFAVA [4].

Riguardo alla nozione generale di densità,data all'inizio di questo paragrafo, valgono i seguenti risultati, dovuti a G.Letta, per la dimostrazione dei quali si rimanda a A.FUCHS-Ph.NANOPOULOS [6].

(1.7) TEOREMA. *Se il filtro $\mathcal{F}$ possiede una base numerabile, si ha* $\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$.

(1.8) TEOREMA. *Per ogni funzione* f *limitata, definita in* $\mathbb{N}^*$ *e ammettente* ℓ *come limite all'infinito (cioé* $\ell = \lim_{n\to\infty} f(n)$), *risulta*

$$\lim_{x,\mathscr{F}} \int f \, d\,\mu_x = \ell$$

(1.9) TEOREMA. *Si supponga che, per ogni* x *e ogni* n, *si abbia*

$$\mu_x\{n\} \geq \mu_x\{n+1\}.$$

Allora la densità δ *generata dalla famiglia di leggi* $(\mu_x)_{x\in X}$ *prolunga la densità asintotica. Più precisamente: per ogni funzione* f, *limitata e positiva, definita in* $\mathbb{N}^*$ *e ammettente* ℓ *come limite di Cesaro (cioè tale che si abbia* $\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k)$ *risulta*

$$\lim_{x,\mathscr{F}} \int f \, d\mu_x = \ell$$

2. La densità analitica generalizzata.

(2.1) TEOREMA. *Sia* $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ *una funzione crescente, non limitata, con* $\phi(1) = 1$. *Sia* $(Q_x)_{x>0}$ *la famiglia di leggi su* $\mathbb{N}^*$ *definite in* (1.5).

Poniamo poi, per ogni parte A *di* $\mathbb{N}^*$,

$$\delta'_\phi(A) = \liminf_{x\downarrow 0} \; Q_x(A) \;\; ; \quad \delta''_\phi(A) = \limsup_{x\downarrow 0} \; Q_x(A)$$

Sia infine $E = \bigcup_{n\geq 0} [p_n, q_n[$, *dove* $(p_n)_{n\geq 0}$, $(q_n)_{n\geq 0}$ *sono successioni di interi strettamente positivi, con* $p_n < q_n \leq p_{n+1}$.

Si ha allora

$$\left(\liminf_{n\to\infty} \frac{n}{1\log\phi(p_n)}\right).\left(\liminf_{n\to\infty} \log \frac{\phi(q_n)}{\phi(p_n)}\right) \leq \delta'_\phi(E) \leq \delta''_\phi(E) \leq$$

$$\leq (\limsup_{n\to\infty} \frac{n}{\log\phi(p_n)}).(\limsup_{n\to\infty} \log \frac{\phi(q_n)}{\phi(p_n)}),$$

dove l'ultima uguaglianza vale a patto che l'ultimo membro non sia della forma $0\cdot(+\infty)$ *(oppure* $(+\infty)\cdot 0$*).*

Dimostrazione. Dimostriamo la prima diseguaglianza. Per questo possiamo naturalmente supporre che i due limiti inferiori che figurano al primo membro siano entrambi maggiori di 0. Basta allora provare che, comunque si fissino α, β, con

$$0 < \alpha < \liminf_{n\to\infty} \frac{n}{\log\phi(p_n)} \; , \quad 0 < \beta < \liminf_{n\to\infty} \log \frac{\phi(q_n)}{\phi(p_n)}$$

risulta $\alpha\beta \leq \delta'_\phi(E)$. Osserviamo, a questo scopo, che esiste un intero m tale che, per ogni $n \geq m$ si abbia

$$\alpha < \frac{n}{\log\phi(p_n)} \quad , \qquad \beta < \log \frac{\phi(q_n)}{\phi(p_n)} \quad .$$

Si ha allora, per ogni $x>0$,

$$Q_x(E) = Q_x(\bigcup_{n<m} [p_n,q_n[) + \sum_{n\geq m}(\frac{1}{\phi(p_n)})^x (1 - (\frac{\phi(p_n)}{\phi(q_n)})^x) \geq$$

$$\geq Q_x(\bigcup_{n<m}[p_n,q_n[) + (1-e^{-\beta x}) \sum_{n\geq m} e^{-\frac{x}{\alpha}n} =$$

$$= Q_x(\bigcup_{n<m}[p_n,q_n[) +(1-e^{-\beta x}) \frac{e^{-xm/\alpha}}{1-e^{-x/\alpha}} .$$

Risulta d'altra parte

$$\lim_{x\to+0} Q_x(\bigcup_{n<m}[p_n,q_n[) = 0,$$

e, per $x\downarrow\downarrow 0$,

$$(1-e^{-\beta x})\,\frac{e^{\frac{-x}{\alpha}m}}{1-e^{-x/\alpha}} \sim \frac{\beta x}{x/\alpha} = \alpha\beta \ .$$

Di qui segue

$$\delta'_\phi(E) \geq \alpha\beta.$$

E' così provata la prima diseguaglianza. In modo analogo si prova l'ultima.

Di evidente dimostrazione è il seguente

(2.2) COROLLARIO. *Nelle ipotesi del teorema* (2.1) *se esistono i due limiti*

$$\text{(a)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log\phi(p_n)} \quad ; \quad \text{(b)}\quad \lim_{n\to\infty} \log \frac{\phi(q_n)}{\phi(p_n)} \quad ,$$

allora l'insieme E *ammette densità analitica generalizzata* δ_ϕ (*secondo la famiglia di leggi* $(Q_x)_{x>0}$) *e vale l'uguaglianza*

$$\delta_\phi(E) = (\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log\phi(p_n)})\cdot(\lim_{n\to\infty} \log \frac{\phi(q_n)}{\phi(p_n)}).$$

a patto che il secondo membro non sia della forma $0\cdot(+\infty)$, *oppure* $(+\infty)\cdot 0$.

(2.3) ESEMPIO

Sia $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ una funzione avente le proprietà richieste nel teorema (2.1); supponiamo inoltre che esista un numero reale α strettamente positivo, tale che, al tendere di n all'infinito, si abbia $\phi(n) \sim c\,n^\alpha$ (con c costante reale strettamente positiva).

Fissato un intero k, con $1 \leq k \leq 9$, poniamo

$$E_k = \bigcup_n [k\ 10^n,\ (k+1)\ 10^n[.$$

E_k è evidentemente l'insieme dei numeri interi strettamente positivi, il cui sviluppo decimale ammette k come prima cifra significativa.

Si ha allora, con facili calcoli,

$$\delta_\phi(E_k) = \log_{10}(1 + \frac{1}{k}).$$

Se poniamo invece, per ogni $m \geq 2$

$$G_m = \bigcup_n [m^{2n},\ m^{2n+1}[\ (*)\ ,$$

si trova

$$\delta_\phi\ (G_m) = \frac{1}{2}\ .$$

Più in generale, se poniamo

$$E = \bigcup_n [p_n, q_n[\ ,$$

e se le successioni $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ verificano le ipotesi seguenti

(2.4) $$\lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{p_n} = r < +\infty$$

(*) L'insieme $G_2 = \bigcup_n [2^{2n}, 2^{2n+1}[$ è stato introdotto da J.KUBILIUS [8]. E' noto che tale insieme non ammette densità asintotica (si veda A.FUCHS - Ph.NANOPOULOS [6]

$$(2.5)\quad \begin{cases} (1)\ \lim\limits_{n\to\infty} p_n^{1/n} = \rho > 1, \text{ oppure (ciò che è lo stesso)} \\ (2)\ \lim\limits_{n\to\infty} q_n^{1/n} = \rho > 1, \end{cases}$$

allora E ammette densità analitica generalizzata δ_ϕ, data da

$$\delta_\phi(E) = \frac{\log r}{\log \rho} \quad (*)$$

3. La densità logaritmica.

(3.1) TEOREMA. *Sia* μ *una misura positiva su* $\mathbb{N}^*$, *di massa totale infinita. Per ogni intero* $r>1$, *tale che la misura* $I_{[1,r[}\cdot\mu$ *non sia nulla, denotiamo con* P_r *la corrispondente misura normalizzata.*

Poniamo poi, per ogni parte E *di* $\mathbb{N}^*$

$$P'(A) = \liminf_{r\to\infty} P_r(A)\ , \qquad P''(A) = \limsup_{r\to\infty} P_r(A).$$

Sia infine $E = \bigcup_{n\geq 0} [p_n, q_n[$, *dove* $(p_n)_{n\geq 0}, (q_n)_{n\geq 0}$ *sono successioni di interi strettamente positivi, con* $p_n < q_n \leq p_{n+1}$.

Si ha allora

$$(3.2)\qquad \left(\liminf_{n\to\infty} \frac{n}{\mu([1,p_n[)}\right)\cdot\left(\liminf_{n\to\infty} \mu([p_n,q_n[)\right) \leq P'(E),$$

(*) Per la densità analitica (in senso stretto), questo risultato segue immediatamente dal teorema 3.2 di A.FUCHS - Ph.NANOPOULOS [6].

(purché il primo membro abbia senso) e

(3.3) $$P''(E) \leq (\limsup_{n\to\infty} \frac{n}{\mu([1,p_n[)}) \cdot (\limsup_{n\to\infty} \mu([p_n,q_n[),$$

(purché il secondo membro abbia senso).

Dimostrazione. Siano a,b due numeri reali, con

$$0 < a < \liminf_{n\to\infty} \frac{n}{\mu([1,p_n[)} \quad , 0 < b < \liminf_{n\to\infty} \mu([p_n, q_n[).$$

Esiste allora un intero positivo m tale che, per ogni $n \geq m$, si abbia

$$\frac{n}{\mu(|1,p_n|)} \geq a, \qquad \mu([p_n,q_n[) \geq b.$$

Per ogni intero $r > 1$, denotiamo con ν_r l'intero determinato dalla relazione

$$p_{\nu_r} \leq r < p_{\nu_r+1}.$$

Si ha allora, per r abbastanza grande,

$$p_{\nu_r+1} > r \geq p_{\nu_r} > \nu_r > m, \qquad \mu([1,r[) > 0,$$

e quindi

$$P_r(E) \geq P_r(\bigcup_{m\leq n<\nu_r} [p_n,q_n[) = \frac{1}{\mu([1,r[)} \sum_{m\leq n<\nu_r} \mu([p_n,q_n[) \geq$$

$$\geq \frac{1}{\mu([1,p_{\nu_r+1}[)} \sum_{m\leq n<\nu_r} \mu([p_n,q_n[) \geq \frac{a}{\nu_r+1} b(\nu_r-m) \sim ab,$$

per $r \to \infty$.

Ne segue

$$P'(E) \geq ab,$$

ciò che, per l'arbitrarietà di a,b, dimostra la (3.2). In modo analogo si prova la (3.3).

Dal teorema adesso dimostrato segue immediatamente il

(3.4) COROLLARIO. *Nelle ipotesi del teorema* (3.1), *se esistono i due limiti*

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\mu([1,p_n[)} \quad , \qquad \text{(b)} \quad \lim_{n\to\infty} \mu([p_n,q_n[),$$

allora l'insieme E *ammette densità* P (*secondo la famiglia di leggi* $(P_r)_{r>1}$) *e vale l'uguaglianza*

$$P(E) = (\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\mu([1,p_n[)}) \cdot (\lim_{n\to\infty} \mu([p_n,q_n[)),$$

a patto che il secondo membro non sia della forma $0 \cdot (+\infty)$, *oppure* $(+\infty).0$.

Assegnata la misura μ, godente delle proprietà richieste nel teorema (3.1), sia ϕ la funzione $\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ crescente, non limitata, con $\phi(1) = 1$, tale che sia

$$\mu\{n\} = \log \frac{\phi(n+1)}{\phi(n)}$$

per ogni intero n strettamente positivo (si veda il punto (1.6) del § 1). Il teorema (3.1) e il corollario (3.4) possono essere allora riformulati rispettivamente come segue:

(3.5) TEOREMA. *Nelle stesse ipotesi e con le stesse notazioni del teorema* (3.1), *risulta*

$$(\liminf_{n\to\infty} \frac{n}{\log\phi(p_n)}) \cdot (\liminf_{n\to\infty} \log \frac{\phi(q_n)}{\phi(p_n)}) \leq P'(E)$$

(purché il primo membro abbia senso) e

$$P''(E) \leq (\limsup_{n\to\infty} \frac{n}{\log\phi(p_n)}) \cdot (\limsup_{n\to\infty} \log \frac{\phi(q_n)}{\phi(p_n)})$$

(purché il secondo membro abbia senso).

(3.6) COROLLARIO. *Nelle stesse ipotesi e con le stesse notazioni del teorema* (3.1), *se esistono i due limiti*

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log\phi(p_n)}\ , \qquad \text{(b)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\phi(q_n)}{\phi(p_n)}\ ,$$

allora l'insieme E *ammette densità logaritmica* P *(associata alla densità analitica generalizzata* δ_ϕ *) e vale l'uguaglianza*

$$P(E) = (\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log\phi(p_n)}) \cdot (\lim_{n\to\infty} \log \frac{\phi(q_n)}{\phi(p_n)})$$

a patto che il secondo membro non sia della forma $0\cdot(+\infty)$ *oppure* $(+\infty)\cdot 0$.

I corollari (2.2) e (3.6) possono poi essere riassunti nella seguente

(3.7) PROPOSIZIONE. *Nelle ipotesi e con le notazioni dei teoremi* (2.1) *e* (3.1), *se esistono i due limiti*

$$(a)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log\phi(p_n)} \quad ; \qquad (b)\ \lim_{n\to\infty} \log \frac{\phi(q_n)}{\phi(p_n)}\ ,$$

allora l'insieme E *ammette densità analitica generalizzata* δ_ϕ *, ammette densità logaritmica* P *(associata a* δ_ϕ *), e valgono le uguaglianze*

$$P(E) = \delta_\phi(E) = (\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log\phi(p_n)}) \cdot (\lim_{n\to\infty} \log \frac{\phi(q_n)}{\phi(p_n)}),$$

purché l'ultimo membro non sia della forma $0.(+\infty)$ *oppure* $(+\infty).0$.

(3.8) ESEMPIO.

Sia $\phi(n)=n$. La densità δ_ϕ è, come sappiamo, la densità analitica. La densità P (cioé la densità logaritmica associata a δ_ϕ) è lo strumento di cui si fa uso in R.SCOZZAFAVA [3].

Gli insiemi E_k, G_m considerati nell'esempio (2.3) ammettono quindi densità analitica e logaritmica (associata), e tali densità coincidono.

Più in generale, se ϕ è del tipo considerato nell'esempio (2.3) e se l'insieme E verifica le ipotesi (2.4), (2.5), allora E ammette densità analitica generalizzata e densità logaritmica associata, e questè densità coincidono (sono entrambe uguali alla quantità $\frac{\log r}{\log \rho}$).

OSSERVAZIONE. I risultati del presente lavoro forniscono condizioni sufficienti ad assicurare l'esistenza, per un dato insieme E, della densità analitica e logaritmica associata, e la loro uguaglianza.

Resta per ora aperto il problema di indagare sulle eventuali condizioni necessarie, e, più in generale, sui rapporti tra le due densità.

BIBLIOGRAFIA

[1] R.S.PINKHAM, *On the distribution of first significant digits*, Ann.Math.,Statist.,32 (1961), 1223-1230.

[2] R.BUMBY - E.ELLENTUCK, *Finitely additive measures and the first digit problem*, Fund.Math.,65 (1969), 33-42.

[3] R.A.RAIMI, *The first digit problem*, Amer.Math.Monthly, 83 (1976), 521-538.

[4] R.SCOZZAFAVA, *Un esempio concreto di probabilità non σ-additiva: la distribuzione della prima cifra significativa dei dati statistici*, Boll. UMI (5) 18 - A (1981), 403-410.

[5] A.FUCHS - G.LETTA, *Sur le problème du premier chiffre décimal*, Boll.UMI (6) 3B (1984) 451-461.

[6] A.FUCHS - Ph.NANOPOULOS, *Mesures invariantes par translation, classes de Dynkin, first - digit problem*, Adv.in Math. 55, 24-74 (1985).

[7] Ph. NANOPOULOS, *Loi de Dirichlet sur* N^* *et pseudo-probabilités*, C.R.A.S., t.280 (1975), 1534-46.

[8] J.KUBILIUS, *Probabilistic methods in the theory of numbers*,AMS. Providence, Rhode Island (1964).

Ricevuto il 5/7/1984