Note di Matematica Vol. VI, 35-48(1986)

SULLA CONVERGENZA DI FORMULE DI QUADRATURA COLLEGATE CON I POLINOMI σ-ORTOGONALI

Andreina MORELLI - Iolanda VERNA

Abstract. *Convergence of quadrature formulae related to σ-orthogonal polynomials is established and the rate of convergence is estimated.*

1. Sia assegnata una successione σ di interi non negativi

$$\sigma = \{s_1, s_2, s_3, s_4, \dots, \} \tag{1.1}$$

che si suppone limitata:

$$0 \le s_i \le s \qquad (i=1,2,\dots). \tag{1.2}$$

Considerata una funzione "peso" $p(x) \in L[a,b]$ ($[a,b]$ intervallo limitato) con $p(x) > 0$ in quasi tutto $[a,b]$, è noto che [4] fissato comunque un intero $m \ge 1$ e i primi m termini della σ-successione $s_1, s_2, \dots, s_m$, esiste ed è unica la soluzione $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ con

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_m < b, \tag{1.3}$$

del sistema di m equazioni algebriche

$$\int_a^b p(x) x^k \prod_{i=1}^{m} (x-x_i)^{2s_i+1} dx = 0 \quad (*) \tag{1.4}$$

$$(k=0,1,\dots,m-1).$$

(*) I polinomi $P_{\sigma,m}(x) = \prod_{i=1}^{m}(x-x_i)$ costituiscono una successione di polinomi σ-ortogonali rispetto al peso $p(x)$ [4].

Ciò premesso, comunque si scelga una funzione $f(x)\epsilon C^{2s}[a,b]$, è possibile costruire in uno ed un sol modo la formula di quadratura gaussiana

$$(1.5)\qquad \int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{2s_i} A_{ik}\, f^{(k)}(x_i) + R_m[f],$$

che sia esatta quando $f(x)$ è un polinomio di grado $\leq$ n-1 ove si è posto

$$(1.6)\qquad n = 2(m + \sum_{i=1}^{m} s_i),$$

avendo scelto come nodi la soluzione del sistema (1.4).
Posto

$$(1.7)\qquad A_m^{(\sigma)}[f] = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{2s_i} A_{ik}f^{(k)}(x_i)$$

è noto che, [9], se risulta

$$\sigma = \{s,s,s....\} \qquad s \geq 0$$

si ha, $\forall f \epsilon C^{2s}[a,b]$,

$$(1.8)\qquad \lim_{m\to\infty} A_m^{(\sigma)}[f] = \int_a^b p(x)f(x)dx.$$

In questo lavoro viene dimostrata la validità di (1.8) anche nel caso di una generica successione σ del tipo (1.1), con gli s_i verificanti (1.2); viene inoltre dato l'ordine di convergenza del resto

$$(1.9)\qquad R_m^{(\sigma)}[f] = \int_a^b p(x)f(x)dx - A_m^{(\sigma)}[f]$$

nel caso in cui i nodi verifichino una legge di distribuzione abbastanza generale.

2. I coefficienti "peso" A_{ik}, determinati univocamente dalle (1.5), in pratica si possono calcolare in questo modo

$$(2.1)\qquad A_{ik} = \int_a^b p(x)\, L_{ik}(x)dx \qquad \begin{cases} i = 1,2,\dots,m \\ k = 0,1,\dots,2s_i \end{cases},$$

dove $L_{ik}(x)$ è il polinomio interpolatore di Lagrange-Hermite di grado $\leq 2\sum_{i=1}^{m} s_i+m-1$ per il quale risulta

$$L_{ik}^{(h)}(x_j) = \delta_{hk}\,\delta_{ij}\ , \qquad \begin{cases} i,j = 1,2,\dots m, \\ h,k = 0,1,\dots 2s_i \end{cases}.$$

Ciò premesso, si costruiscano le m+1 funzioni

$$(2.2)\qquad \begin{cases} \varphi_0(x) = \int_a^x p(t)\, \dfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, dt \\ \\ \varphi_i(x) = \int_a^x p(t)\, \dfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, dt - \sum_{j=1}^{i}\sum_{k=0}^{2s_i} (-1)^k A_{jk} \dfrac{(x-x_j)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \end{cases}$$

$$(i=1,2,\dots,m)$$

E' subito visto che, in base a (2.1), si ha

$$\varphi_m(x) = \int_b^x p(t)\, \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt\ .$$

Posto $x_o = a, x_{m+1} = b$, ed introdotta la funzione $\Phi_m(x)$, definita a tratti da

(2.3) $$\Phi_m(x) = \varphi_i(x), \qquad x\in[x_i, x_{i+1}], \quad (i=0,1,\ldots,m),$$

si trova subito che risulta

(2.4) $$\begin{cases} \Phi_m^{(k)}(a) = \Phi_m^{(k)}(b) = 0, & \\ \Phi_m^{(k)}(x) > 0, \quad \forall x\in(a,x_1), & (k=0,1,\ldots,n-1), \\ (-1)^k\, \Phi_m^{(k)}(x) > 0, \quad \forall x\in(x_m,b)\ ; & \end{cases}$$

(2.5) $$\left[\Phi_m^{(n-k-1)}(x)\right]_{x_i-0}^{x_i+0} = \varphi_i^{(n-k-1)}(x_i) - \varphi_{i-1}^{(n-k-1)}(x_i) =$$

$$= \begin{cases} (-1)^{k-1} A_{ik} & k=0,1,\ldots 2s_i, \\ 0 & K=2s_i+1,\ldots,n-1. \end{cases}$$

Valgono le seguenti proprietà: (*)

A - *La funzione* $\Phi_m(x)$ *è positiva in* (a,b);

B - *Le funzioni* $\varphi_i^{(n-k-1)}(x)$ *hanno in* (a,b) *esattamente* $k+1$ *zeri che cadono tutti nell'intervallo* (x_i, x_{i+1}), $(i=1,2,\ldots,m-1;\ k=0,1,\ldots,2s_i)$.

(*) La dimostrazione delle proprietà A e B verrà svolta nel §5.

3. La proprietà B consente di dare per le $\varphi_i^{(n-k-1)}(x)$ formule integrali di rappresentazione che permettono di scrivere maggiorazioni per i coefficienti A_{ik} [9].

In relazione agli intervalli consecutivi $(x_{i-1},x_i),(x_i,x_{i+1})$, $(i=2,3,\dots,m-1)$, si possono determinare due successioni $\{y_{i-1,l}\},\{z_{i,l}\}$ con

$$x_{i-1}<y_{i-1}\equiv y_{i-1,0}<y_{i-1,1}<\dots<y_{i-1,k}<x_i< \quad (*)$$

$$<z_{i,k}<z_{i,k-1}<\dots<z_{i,0}\equiv z_i<x_{i+1}$$

in modo che

$$\varphi_{i-1}^{(n-j-1)}(y_{i-1,j}) = \varphi_i^{(n-j-1)}(z_{i,j}) = 0 \qquad (j=0,1,\dots,k).$$

Si può quindi scrivere, $\forall x \in [a,b]$,

$$(3.1)\quad \varphi_{i-1}^{(n-k-1)}(x) = \int_{y_{i-1,k}}^{x} dt_k \int_{y_{i-1,k-1}}^{t_k} dt_{k-1}\dots \int_{y_{i-1,0}}^{t_1} p(t)dt,$$

$$(3.2)\quad \varphi_i^{(n-k-1)}(x) = \int_{z_{i,k}}^{x} dt_k \int_{z_{i,k-1}}^{t_k} dt_{k-1}\dots \int_{z_{i,0}}^{t_1} p(t)dt \quad .$$

Tenuto conto che si ha

$$(3.3)\quad (-1)^k A_{ik} = \varphi_{i-1}^{(n-k-1)}(x_i)-\varphi_i^{(n-k-1)}(x_i), \qquad \begin{cases} i=1,2,\dots,m \\ k=0,1,\dots,2s_i \end{cases}$$

(*) E' evidente che $y_{i,j}=z_{i,k-j}$ $(j=0,1,\dots,k)$; inoltre per $i=1$, $y_o=y_{oo}=a$; per $i=m$, $z_{mo}=z_m=b$.

si può dimostrare il seguente

TEOREMA 1: *Risulta*

$$(3.4)\qquad |A_{ik}| < \int_{y_{i-1}}^{z_i} \frac{|x_i-t|^k}{k!}\, p(t)dt\ , \qquad \begin{cases} i=1,2,\dots,m \\ k=0,1,\dots,2s_i \end{cases}$$

Dimostrazione. Dalla rappresentazione integrale di $\varphi_{i-1}^{(n-k-1)}(x)$ e $\varphi_i^{(n-k-1)}(x)$ segue

$$\varphi_{i-1}^{(n-k-1)}(x_i) > 0;\ (-1)^k\ \varphi_i^{(n-k-1)}(x_i) < 0 \qquad \begin{cases} i=1,2,\dots,m; \\ k=0,1,\dots,2s_i \end{cases}$$

Con facili passaggi partendo dalla (3.1), si ottiene

$$\varphi_{i-1}^{(n-k-1)}(x_i) < \int_{y_{i-1}}^{x_i} \frac{(x_i-t)^k}{k!} p(t)dt;$$

e dalla (3.2)

$$|\varphi_i^{(n-k-1)}(x_i)| < \int_{x_i}^{z_i} \frac{(t-x_i)^k}{k!}\, p(t)dt.$$

Dalla (3.3) segue dunque

$$|A_{ik}| < \varphi_{i-1}^{(n-k-1)}(x_i) + |\varphi_i^{(n-k-1)}(x_i)| < \int_{y_{i-1}}^{z_i} \frac{(x_i-t|^k}{k!} p(t)dt.$$

Ricordata la (1.2) vale il seguente fondamentale

TEOREMA 2. *Se* $f(x) \in C^{2s}[a,b]$ *introdotto il funzionale*

$$A_m^{(\sigma)}[f] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{2s_i} A_{ik}\ f^{(k)}(x_i),$$

ove i nodi $x_i = x_{im}$ $(a < x_1 < x_2 < \dots < x_m < b)$ *sono gli zeri del po-*

linomio $P_{\sigma,m}(x)$ *di grado* m *, della famiglia dei polinomi* σ*-ortogonali in* $[a,b]$ *rispetto al peso* $p(x)$*, vale la relazione*

$$(3.5)\qquad \lim_{m\to\infty} A_m^{(\sigma)}[f] = \int_a^b p(x)f(x)dx \; .$$

Dimostrazione. E' noto che (*), data una funzione $f(x)\epsilon C^{p+2s}[a,b]$ con $p \geq 0$ fissato, detto $\omega_{p+2s}(\delta)$ il modulo di continuità di $f^{(p+2s)}(x)$ in $[a,b]$, vale il seguente teorema: comunque si fissi un intero $n \geq p+2s$, ad ogni $f(x)\epsilon C^{p+2s}[a,b]$, si può associare almeno un polinomio di grado n, $Q_n(x)$, e una costante H, indipendente da n, tale che

$$(3.6)\qquad |f^{(k)}(x)-Q_n^{(k)}(x)| < H\left(\frac{b-a}{n-p-2s}\right)^{p+2s-k} \omega_{p+2s}\left(\frac{b-a}{n-p-2s}\right), \qquad (k=0,1,\dots,p+2s) \; .$$

Posto allora

$$(3.7)\qquad A_{ik} = 0 \qquad \begin{cases} i=1,2,\dots,m \\ k=2s_i+1,\; 2s_i+2,\dots,2s; \end{cases}$$

si può scrivere

$$(3.8)\qquad A_m^{(\sigma)}[f] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{2s} A_{ik}\, f^{(k)}(x_i)$$

Per m così grande per cui risulta (con p=0)

(*) Cfr. [13] per esempio.

$$2s \leq n \leq 2(\sum_{i=1}^{m} s_i+m) - 1$$

si ha

$$\left|\int_a^b p(x)f(x)dx-A_m^{(\sigma)}[f]\right| \leq \left[\int_a^b p(x)[f(x)-Q_n(x)]dx\right|+\left|A_m^{(\sigma)}[Q_n-f]\right| <$$

$$< H\ \omega_{2s}(\frac{b-a}{n-2s})\ \{(\frac{b-a}{n-2s})^{2s}\int_a^b p(x)dx+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{2s}|A_{ik}|(\frac{b-a}{n-2s})^{2s-k}\}.$$

Posto

$$\mu_o = \int_a^b p(x)dx$$

e tenendo conto di (3.4) si ottiene

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{2s}|A_{ik}|(\frac{b-a}{n-2s})^{2s-k} < \sum_{k=0}^{2s}(\frac{b-a}{n-2s})^{2s-k}\sum_{i=1}^{m}\int_{y_{i-1}}^{z_i}\frac{|x_i-t|^k}{k!}p(t)dt <$$

$$< \sum_{k=0}^{2s}(\frac{b-a}{n-2s})^{2s-k}(\frac{b-a}{k!})^k\sum_{i=i}^{m}\int_{y_{i-1}}^{z_i}p(t)dt < 2\,\mu_o(b-a)^{2s}\sum_{k=0}^{2s}\frac{1}{k!(n-2s)^{2s-k}}.$$

In definitiva risulta

$$\left|\int_a^b p(x)f(x)dx-A_m^{(\sigma)}[f]\right| < H\omega_{2s}(\frac{b-a}{n-2s})\,\mu_o(b-a)^{2s}\{\frac{1}{(n-2s)^{2s}}+2\sum_{k=0}^{2s}\frac{1}{k!(n-2s)^{2s-k}}\}$$

e quindi la tesi.

4. Considerato

$$R_m^{(\sigma)}[f] = \int_a^b p(x)f(x)dx - A_m^{(\sigma)}[f] \tag{4.1}$$

vale il seguente

TEOREMA 3. *Se* $f(x) \in C^{2s}[a,b]$ *e se i nodi* $x_i = x_{i_m}$, *zeri del polinomio* σ*-ortogonale* $P_{\sigma,m}(x)$ *sono tali che*

$$x_{i+1} - x_i \leq q \quad (b-a)/m \qquad (i=1,2,\dots,m-1) \tag{4.2}$$

con q *indipendente da* m *e da* i, *risulta*

$$R_m^{(\sigma)}[f] = \sigma \left(\frac{1}{m^{2s}}\right) . \tag{4.3}$$

Dimostrazione. Tenendo conto di (4.2) e (3.4) si ottiene

$$|A_{ik}| < \frac{1}{k!} \left(q \frac{b-a}{m}\right)^k \int_{y_{i-1}}^{z_i} p(t)dt$$

e quindi si ha

$$|R_m^{(\sigma)}[f]| < H\omega_{2s}\left(\frac{b-a}{n-2s}\right)(b-a)^{2s} \frac{1}{(n-2s)^{2s}} \{ \mu_0 +$$

$$\sum_{k=0}^{2s} \left(\frac{n-2s}{b-a}\right)^k \frac{1}{k!} \left(q \frac{b-a}{m}\right)^k \sum_{i=1}^{m} \int_{y_{i-1}}^{z_i} p(t)dt \} <$$

$$< H\omega_{2s}\left(\frac{b-a}{n-2s}\right)(b-a)^{2s} \mu_0 \{1+2 \sum_{k=0}^{2s} \frac{q^k}{k}\left(\frac{n-2s}{m}\right)^k\} \frac{1}{(n-2s)^{2s}} .$$

Per m così grande per cui risulti

$$m + 2s \leq n \leq 2\left(\sum_{i=1}^{m} s+m\right) - 1,$$

si ha la tesi.

5. Dimostriamo le proprietà A e B (*).

Si supponga dunque (Cfr. (1.2))

$$0 \leq s_i \leq s \qquad (i=1,2,\dots,m)$$

e sia $(i_1,i_2,\dots,i_m)$ una permutazione degli indici $(1,2,\dots,m)$ per cui risulti

$$0 \leq s_{i_1} \leq s_{i_2} < \dots \leq s_{i_m} \quad , \tag{5.1}$$

con la convenzione di scegliere $i_h<i_k$ se $s_{i_h} = s_{i_k}$.

La proprietà A sarà dimostrata quando si sarà fatto vedere che, se si suppone che la $\Phi_m(x)$ si annulli in almeno un punto di (a,b) $\Phi_m^{(n-2s_{i_m}-2)}(x)$ avrebbe *almeno* $n-2s_{i_m}-1$ zeri in (a,b), mentre ne ha *al più* $n-2s_{i_m}-2$. Infatti se $\Phi_m(x)$ si annullasse in (a,b), $\Phi_m'(x)$ avrebbe almeno due zeri in (a,b), $\Phi_m''(x)$ almeno tre, e così via, $\Phi_m^{(n-2s_{i_m}-2)}(x)$ avrebbe almeno $n-2s_{i_m}-1$ zeri in (a,b).

Dimostriamo ora con il metodo di induzione che $\Phi_m^{(n-2s_{i_m}-2)}(x)$ ha in (a,b) al più $n-2s_{i_m}-2$ zeri.

Sia $m=2$. Si possono verificare i tre casi $s_1=s_2$; $s_1 < s_2$; $s_2 < s_1$; quindi il teorema è dimostrato (vedi nota a pie' di pagina).

(*) Le proprietà A e B sono state dimostrate in [9] nel caso $s_1=s_2=\dots=s_m=s$; la sola proprietà A in [7] nel caso $0<s_1<s_2<\dots<s_m$; quest'ultima dimostrazione si può subito estendere al caso $0<s_m<s_{m-1}<\dots<s_2<s_1$.

Sia $m=3$. Per i casi $s_1=s_2=s_3$; $s_1<s_2<s_3$; $s_1>s_2>s_3$ si veda la nota di pag. 10 .

Supponiamo ora $s_{i_1} < s_{i_2} < s_{i_3}$ e prendiamo inizialmente in esame il caso $i_1=1, i_2=3, i_3=2$. Poiché $\Phi_3^{(n)}(x)=p(x)$ q.o. in (a,b), tenendo conto di noti risultati sui polinomi generalizzati (vedi per esempio [8]) $\Phi_3^{(n-2s_1-2)}(x)$ ha in (x_i,x_{i+1}), $(i=1,2)$, al più $2s_1+2$ zeri ed è continua in x_1. $\Phi_3^{(n-2s_1-k-2)}(x)$, per $k=1,2,\dots,2(s_3-s_1)-1$, ha $2s_1+2$ zeri in (a,x_2) e $2s_1+k+2$ zeri in (x_2,x_3). Per $k=2(s_3-s_1)$, $\Phi_3^{(n-2s_3-2)}(x)$ è continua in x_3, ha $2s_1+2$ zeri in (a,x_2) e $2s_3+2$ zeri in (x_2,b).

Per $k=1,2,\dots,2(s_2-s_3)$, $\Phi_3^{(n-2s_3-k-2)}(x)$ ha $2s_1+2$ zeri in (a,x_2) e $2s_3+2$ zeri in (x_2,b). In conclusione $\Phi_3^{(n-2s_2-2)}(x) = \Phi_3^{(n-2s_{i_m}-2)}(x)$ in (a,b) risulta continua ed ha al più $4+2s_1+2s_3 = n-2s_2-2 = n-2s_{i_m}-2$ zeri.

Nel caso $i_1=2, i_2=1, i_3=3$ risulta che: $\Phi_3^{(n-2s_2-2)}(x)$ ha $2s_2+2$ zeri in (x_1,x_2) e (x_2,x_3) ed è continua in x_2, perciò ha in (x_1,x_3) $4s_2+4$ zeri; $\Phi_3^{(n-2s_1-2)}(x)$ ha in (x_1,x_3) $4s_2+4+2(s_1-s_2) = 2s_1+2s_2+4$ zeri ed è continua in x_1; $\Phi_3^{(n-2s_3-2)}(x)$ in (a,b) è continua ed ha al più $2s_1+2s_2+4=n-2s_3-2$ zeri.

Nei due casi: $i_1=2$, $i_2=3$, $i_3=1$; $i_1=3, i_2=1, i_3=2$, si procede in modo del tutto analogo.

Se tra s_{i_1}, s_{i_2}, s_{i_3} c'è qualche coincidenza, il procedimento risulta abbreviato. Si supponga per esempio $s_2 < s_1 = s_3$.

Risulta che $\Phi_3^{(n-2s_2-2)}(x)$ è continua in x_2 e presenta $4s_2+4$ zeri in (x_1,x_3); allora $\Phi_3^{(n-2s_1-2)}(x) = \Phi_3^{(n-2s_3-2)}(x)$ in (a,b) è continua ed ha al più $2s_1+2s_2+4$ zeri.

Sia $m \geq 4$; supponiamo vero il teorema per m-1 e dimostriamolo per m, cioé se, posto $0 \leq s_{i_1} \leq s_{i_2} \leq \ldots \leq s_{i_{m-1}}$, $n=2(\sum_{j=1}^{m-1} s_{i_j} + m-1)$, $\Phi_{m-1}^{(n-s_{i_{m-1}}-2)}(x)$ in (a,b) è continua e ha al più $n-2s_{i_{m-i}}-2$ zeri, allora (*) $\Phi_m^{(n-2s_{i_n}-2)}(x)$ in (a,b) risulta continua e presenta al più $n-2s_{i_m}-2$ zeri, essendo $n=2(\sum_{j=1}^{m} s_{i_j} + m)$.

Se $s_{i_{m-1}} = s_{i_m}$, basta ripetere il ragionamento fatto nel caso $m = 3$, $i_i < i_2 = i_3$.

Sia dunque $s_{i_{m-1}} < s_{i_m}$; tre casi sono possibili:

$$i_m = 1; \; i_m = m; \; 2 \leq i_m \leq m-1.$$

Sia $i_m = 1$, $\Phi_m^{(n-2s_{i_{m-1}}-2)}(x)$ in (x_1,b) è continua ed ha

---

(*) si suppone ovviamente $0 \leq s_{i_1} \leq s_{i_2} \leq \ldots \leq s_{i_{m-1}} \leq s_{i_m}$.

$n-2s_{i_m}-2=2(\sum_{j=1}^{m-1} s_{i_j} + m-1)$ zeri. $\Phi_m^{(n-2s_{i_m}-2)}(x)$ in (a,b) è continua e ha al più $n-2s_{i_m}-2$ zeri.

Nel caso $i_m = m$ si può ripetere il ragionamento fatto per $i_m = 1$.

Sia ora $2 \leq i_m \leq m-1$; $\Phi_m^{(n-2s_{i_{m-1}}-2)}(x)$ in (a,x_{i_m}) e in (x_{i_m},b) è continua ed ha al più $2(\sum_{j=1}^{i_m-1} s_j+i_m-1)$ zeri in (a,x_{i_m}) e $2(\sum_{j=i_m+1}^{m} s_j+m-i_m)$ in (x_{i_m},b).

In conclusione $\Phi_m^{(n-2s_{i_m}-2)}(x)$ in (a,b) è continua ed al più $2(\sum_{j=1}^{i_m-1} s_j + \sum_{j=i_m+1}^{m} s_j+m-1)=2(\sum_{j=1}^{m-1} s_{i_j}+m-1)=n-2s_{i_m}-2$ zeri.

La proprietà A è quindi completamente dimostrata.

Per la dimostrazione della proprietà B, basta osservare che $\varphi_i^{(n-k-1}(x)$ appare in $[a,b]$ come un polinomio generalizzato (cfr. [8]) di ordine k+1 e poiché si ha

$$\varphi_i^{(n-k-1)}(x) = \Phi_m^{(n-k-1)}(x) \qquad \forall x \in (x_i,x_{i+1})$$

$$(i=1,2,\ldots,m-1;\ k=0,1,\ldots,2s_i)$$

tutti e soli i k+1 zeri di $\varphi_i^{(n-k-1)}(x)$ in $[a,b]$ sono quelli presenti in (x_i,x_{i+1}).

BIBLIOGRAFIA

[1] P.L.BUTZER: The Banach-Steinhaus theorem with rates, and applications to various branches of analysis, *General Inequalities* II, Birkhauser, Basel (1979-80), 299-314.

[2] P.L.BUTZER, K.SCHERER, U.WESTPHAL: On the Banach-Steinhaus theorem and application in locally convex spaces. *Acta Sci.Math.* (Szeged) **34**, (1973), 25-34.

[3] A.GHIZZETTI-A.OSSICINI: Quadrature Formulae, *I.S.N.M.* 13, Birkhauser, Basel (1970).

[4] A.GHIZZETTI, A.OSSICINI: Sull'esistenza e unicità delle formule di quadratura gaussiane, *Rend. Mat.* (1), **8**, Serie VI (1975), 1-15.

[5] C.A.MICCHELLI: The fundamental theorem of Algebra for Monosplines with Multiplicities, *Linear Operators and Approximation I.S.N.M.* 20 (1971), 419-430.

[6] C.A.MICCHELLI, A.SHARMA: On a problem of Turan: Multiple node gaussian quadrature, *Rend. Mat.* (VII), 3, 3 (1983), 529-552.

[7] A.MORELLI, I. VERNA: Formula di quadratura in cui compaiono i valori della funzione e delle derivate con ordine massimo variabile da nodo a nodo, *Rend. Cir. Mat. Palermo* (2) Tomo XVIII, (1969), 91-98.

[8] A.OSSICINI, F.ROSATI: Alcune osservazioni sugli operatori di tipo W di Polya. *Matematiche*, Vol. XXVIII - Fasc. I (1973), 1-11.

[9] A.OSSICINI, F.ROSATI: Sulla convergenza dei funzionali ipergaussiani, *Rend. Mat.* (1), 11, Serie VI (1978), 97-108.

[10] T.POPOVICIU: Sur une généralisation de la formule d'intégration numérique de Gauss, *Acad.R.P.Romine Fil.Iasi Stud.Cerc.Sti.* 6, (1955), 29-57.

[11] G.ROGHI: *Alcune osservazioni sulla convergenza di formule di quadratura ipergaussiane*, Pubb. Ist. Mat.Appl.Fac.Ing.Università degli Studi di Roma - Quaderno n.12 (1978), 15-20.

[12] D.D.STANCU: Asupra una formula generale de integrare numerica, *Acad. R.P.Romine* IX (1) (1958), 129-143.

[13] G.SZEGO: Orthogonal Polynomials, *Am.Math.Soc.Colloquium Publication* 23, N.Y. (1939).

Ricevuto l'1/3/1985

Dipartimento di Metodi e Modelli
Matematici per le Scienze Applicate
Via A.Scarpa, 10
00161 R O M A