

## Capitolo III

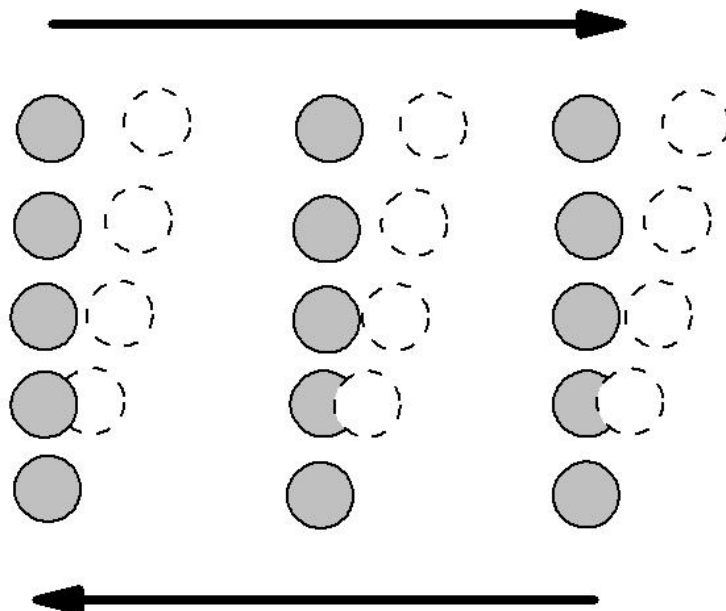
### LA DEFORMAZIONE NEI METALLI REALI

Nei monocristalli la deformazione avviene per scorrimento notevolmente ingente lungo un unico piano. Nei materiali policristallini, per poter avere lo stesso livello de formativo, e' necessaria la deformazione di ogni singolo grano col mantenimento di continuita' rispetto a quelli adiacenti; essendo tali grani, orientati diversamente gli uni rispetto agl'altri, lo scorrimento avviene lungo diversi piani. Perche' possa avvenire lo scorrimento bisogna che siano attivati almeno cinque sistemi indipendenti di scorrimento, considerando come indipendenti i sistemi di scorrimento che danno una deformazione del cristallo che non puo' essere ottenuta combinando appropriatamente deformazioni sugli altri sistemi.

*La frattura:* Nel caso di un metallo ideale privo di difetti la frattura sopraggiunge nel momento in cui la forza del legame atomico su un piano perpendicolare all'asse di sollecitazione viene superata.

Dal punto di vista atomico, la deformazione elastica consiste in un modesto scorrimento di atomi dalla loro posizione di equilibrio, a causa di una forza esterna di taglio.

Rimovendo la sollecitazione esterna, gli atomi tornano spontaneamente alla loro posizione iniziale di equilibrio.



*Figura 3.1: scostamento degl'atomi dalla posizione di equilibrio a causa di una sollecitazione di taglio.*

Se la sollecitazione è sufficientemente elevata, gli atomi si spostano troppo dalla posizione di equilibrio, e si ha uno scorrimento di tutti gli atomi al di sopra di un piano rispetto a quelli al disotto.

Durante tale spostamento ciascun atomo si sposta sufficientemente da occupare il sito reticolare più prossimo.

A livello macroscopico questo corrisponde alla formazione di un gradino, cioè ad una deformazione di tipo plastico.

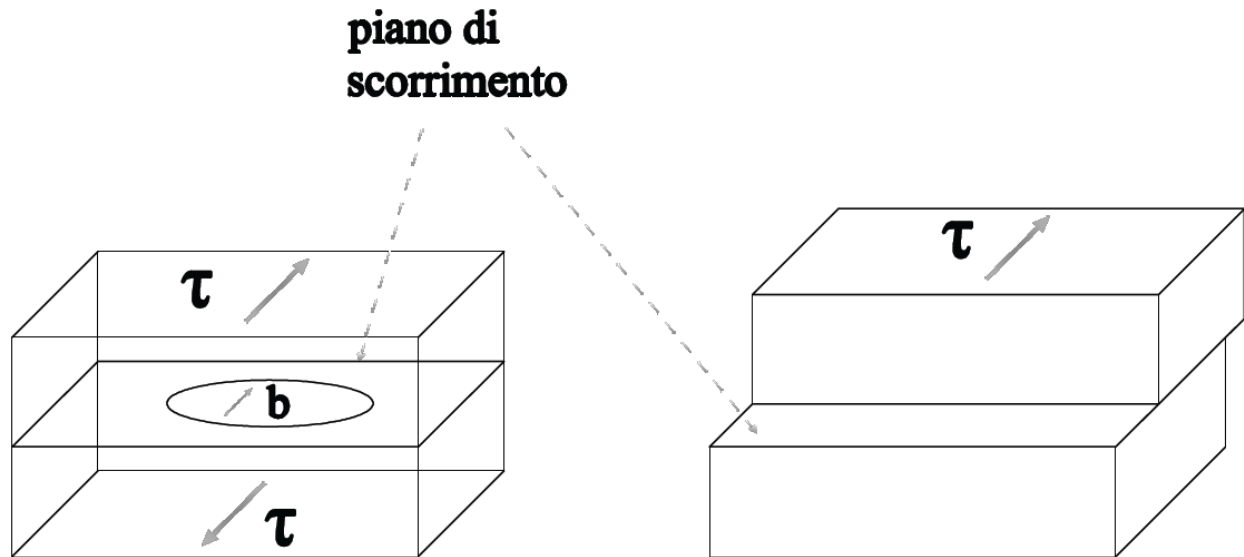


Figura 3.2: formazione di un gradino tra piani atomici contigui a causa di una sollecitazione di taglio.

E' bene precisare che sono le sollecitazioni di taglio a causare la deformazione, e non quelle normali; infatti, la deformazione non è altro che il prodotto di scorrimenti di piani di atomi l'uno sull'altro, fenomeno reso possibile da sollecitazioni di taglio (quelle normali piuttosto tenderebbero ad "aprire" i piani, o al limite a comprimerli).

Vediamo a questo punto quale potrebbe essere il valore della sollecitazione di taglio necessaria per causare una deformazione plastica.

Si abbiano due piani atomici. La distanza interplanare sia  $a$ , la distanza interatomica su ogni piano sia  $b$ .

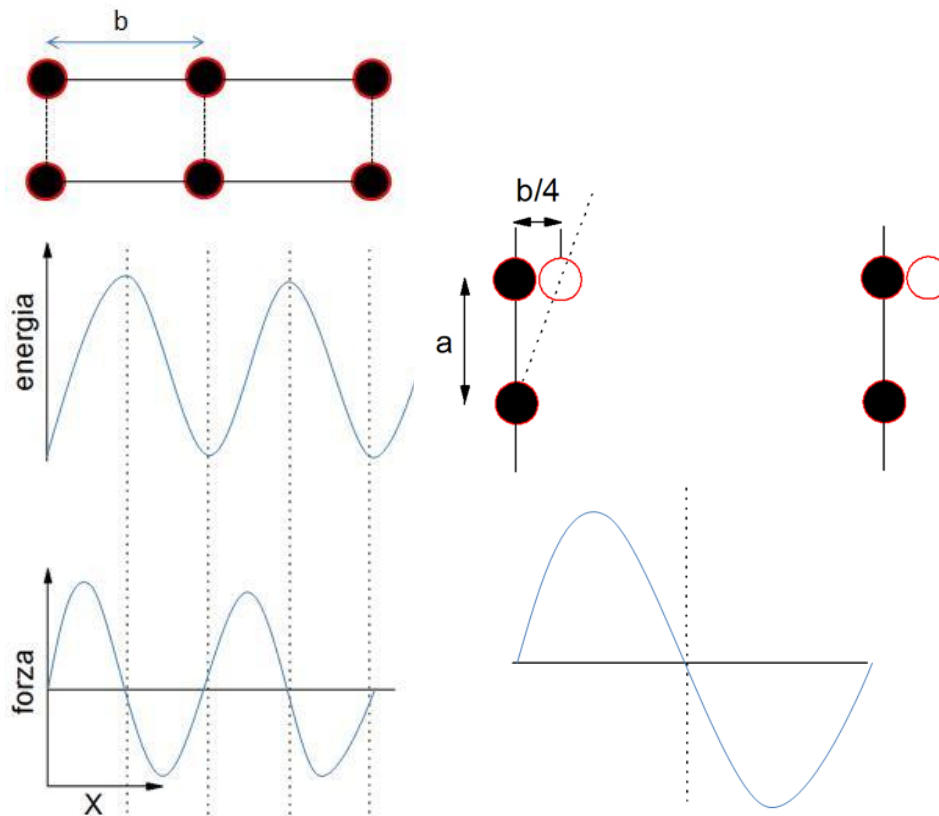


Figura 3.3: forza necessaria per scostare gl'atomi dalla posizione di equilibrio.

Nella posizione di equilibrio, ciascun atomo è nella posizione di minima energia.

Uno spostamento dalla posizione di equilibrio comporta un aumento di energia, descritto da una legge periodica.

Tale spostamento, quindi, richiede che dall'esterno sia esercitata una forza, esprimibile come sollecitazione di taglio  $\tau$ , che ha un andamento sinusoidale.

Il massimo valore della sollecitazione esterna è necessario quando lo spostamento di ciascun atomo è pari a  $b/4$ .

Prendendo, come valore massimo della tensione  $\tau_m$  a  $x=b/4$ , si può scrivere:

$$\tau = \tau_m \sin\left(2\pi \frac{x}{b}\right) \quad (3.5)$$

dove  $x$  è lo spostamento dalla posizione di equilibrio.

Per piccoli valori di  $x$ , la precedente può essere trasformata in:

$$\tau = \tau_m \frac{2\pi x}{b} \quad (3.6)$$

La deformazione di taglio  $\gamma$ , in accordo con il modello della Figura, è  $\gamma = x/a$ .

Se lo spostamento è piccolo, vale ancora la legge di Hooke, per cui:

$$\tau = G\gamma = G \frac{x}{a} \quad (3.7)$$

che sostituendo da:

$$\tau_m = \frac{Gb}{2\pi a} \quad (3.8)$$

si osserva che la resistenza teorica di un cristallo è minima quando  $a$  è elevato, e  $b$  è piccolo. Entrambe queste condizioni sono soddisfatte per i piani ad elevato impacchettamento, sui quali le distanze interatomiche sono minori; inoltre, la distanza fra questi piani è la massima che si ottiene fra piani della stessa famiglia. Si ha così che lo scorrimento, responsabile della deformazione, nei cristalli avviene sui piani ad elevato impacchettamento, nelle direzioni in cui è minima la distanza interatomica.

Consideriamo un cristallo cubico a facce centrate, la relazione tra il parametro reticolare e la distanza interplanare è data da:

$$b = a_0 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a_0}{\sqrt{2}}, \text{ in un sistema cubico la distanza interplanare si calcola come:}$$

$$d_{hkl} = \frac{a_0}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}$$

nel sistema cfc il piano di massimo impacchettamento sul quale avviene lo scorrimento è il piano (111), per cui:

$$d_{111} = \frac{a_0}{\sqrt{3}}, \text{ } d_{111} \text{ è equivalente ad } a, \text{ sostituendo nella (3.8) otteniamo:}$$

$$\tau_m = \frac{G}{2\pi} \frac{a_0}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{3}}{a_0} \cong \frac{G}{5.13}$$

Il caso più semplice di frattura è quello che riguarda la separazione del campione (o componenti) in due o più parti, sotto l'azione di forze che cambiano molto lentamente nel tempo, a temperature che sono una frazione piuttosto bassa di quella di fusione.

In relazione alla capacità del materiale di deformarsi in maniera plastica prima di rompersi, si parla di rottura duttile o rottura fragile. I materiali duttili vanno a rottura dopo deformazioni plastiche rilevanti, che assorbono parecchia energia; viceversa la frattura dei materiali fragili, essendo accompagnata da deformazioni plastiche irrilevanti, assorbe poca energia.

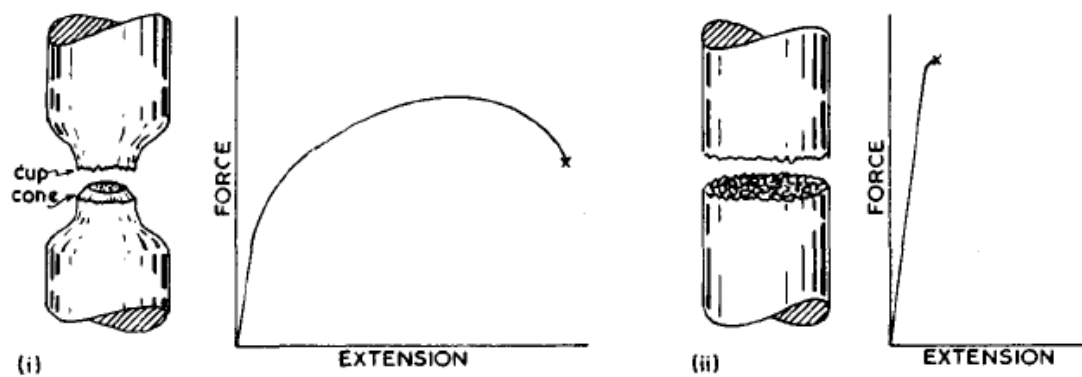


Figura 3.4: differenza nella curva di trazione e nella modalità di frattura tra un materiale duttile e un materiale fragile.

Qualsiasi processo di rottura è articolato in due diverse fasi: la formazione della cricca e la sua propagazione; nel caso della frattura duttile, essa è accompagnata dalle presenza di rilevanti deformazioni plastiche all'apice della cricca, il processo di propagazione richiede tempi relativamente lunghi e la lunghezza della cricca è piuttosto rilevante. Una cricca di questo tipo è spesso definita stabile, cioè non aumenta di lunghezza a meno che il carico applicato non aumenti. Al contrario, nel caso della frattura fragile, le cricche si propagano in maniera estremamente rapida (cricche instabili) e tale propagazione, una volta iniziata, continua anche in assenza di aumenti del carico.

Dal punto di vista del progettista è ovvio che la rottura di tipo duttile è sempre da preferirsi, in quanto è accompagnata da deformazioni plastiche in genere facilmente rilevabili, mentre quella fragile avviene in maniera catastrofica e repentina.

*La frattura fragile:* Come detto la frattura fragile avviene senza che si verifichi una apprezzabile deformazione; la direzione di propagazione è normalmente perpendicolare a quella di applicazione del carico, e la superficie di frattura è relativamente piatta. Dal punto di vista dei legami atomici si ha una netta separazione di atomi lungo un piano.

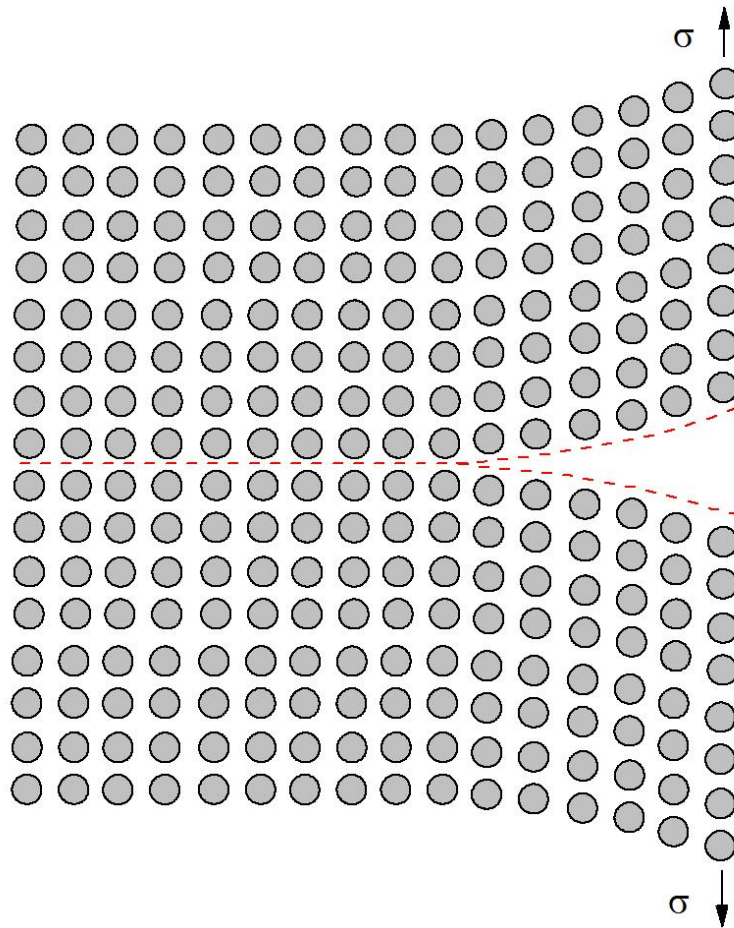


Figura 3.5: separazione dei piani atomici durante la frattura per clivaggio.

Per i materiali cristallini come i metalli, la propagazione della cricca è dovuta alla rottura ripetuta dei legami atomici fra piani di atomi paralleli (clivaggio), con conseguente frattura di tipo transgranulare.

In altri casi, la propagazione avviene lungo i confini di grano, fenomeno tipico di quei materiali in cui avviene un qualche fenomeno di infragilimento sui confini stessi.

Griffith per primo notò che materiali fragili con microfratture sulla superficie resistevano in maniera molto minore alle sollecitazioni esterne. Questo non solo per la riduzione della sezione resistente ma per l'effetto di concentrazione delle tensioni nei pressi di tali "intagli".

In genere tale concentrazione degli sforzi dipende dal carico applicato  $S$ , dalla larghezza del difetto  $c$  e dal raggio di curvatura all'apice  $r$ .

$$S_c = 2S\sqrt{\frac{c}{r}} \quad (3.9)$$

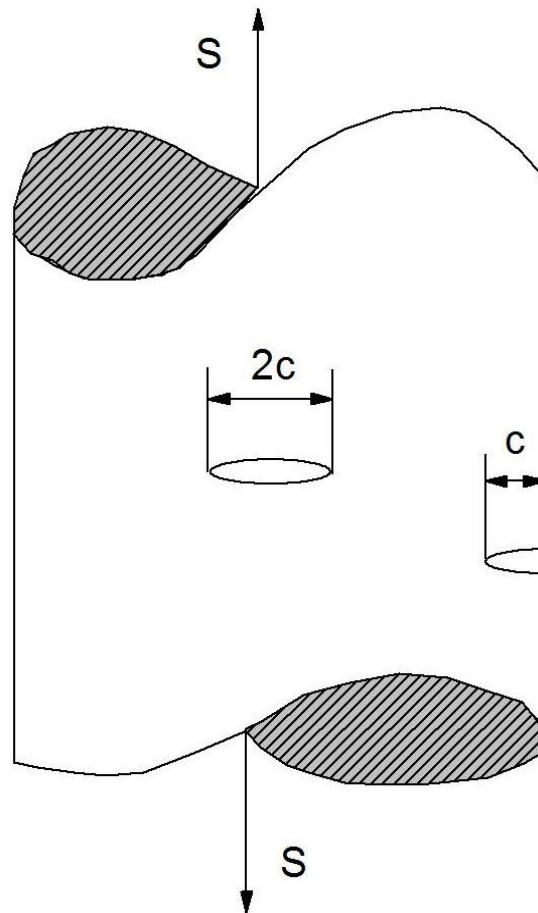


Figura 3.6: presenza di difetti in un solido sottoposto a trazione.

Considerando un difetto di dimensioni nell'ordine di  $10^{-4}$  m e un raggio di curvatura di  $10^{-10}$  m si ottiene un rapporto  $S_c/S$  di circa  $10^3$ , cio' vuol dire che la presenza del difetto amplifica di mille volte la sollecitazione in una regione molto piccola del materiale all'apice del difetto. Tale problema e' presente in molti metalli fragili esclusivamente in trazione. In compressione infatti vi puo' essere un effetto che produce la "chiusura" dei difetti. Questa e' la spiegazione per cui metalli fragili come le ghise resistono molto meglio in compressione piuttosto che in trazione. Altra caratteristica della frattura fragile e' che questa sopraggiunge per propagazione attraverso i bordi di grano.

*La frattura duttile:* La configurazione tipica di due campioni rotti in maniera duttile è riportata nella Figura.

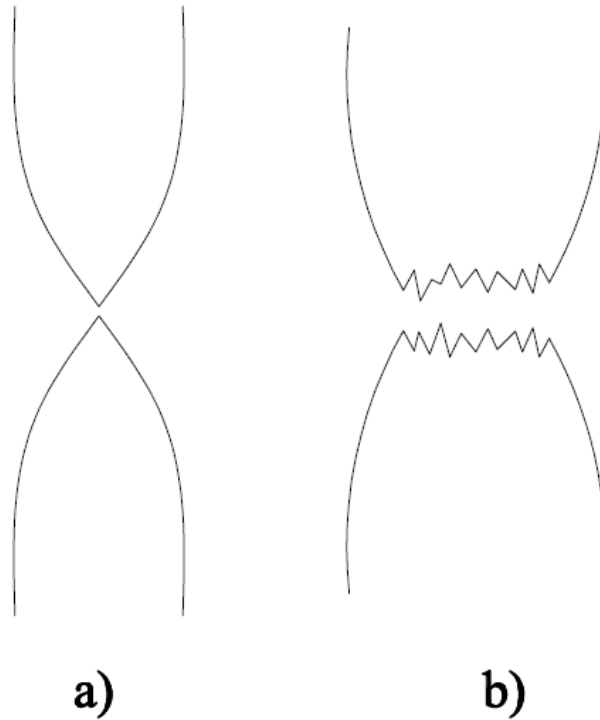


Figura 3.7: differenti modalità di frattura duttile.

Nel campione a sinistra, la rottura è avvenuta dopo una rilevante strizione, come succede nei metalli estremamente dolci (oro puro, piombo). Più comune è la configurazione riportata in figura b), in cui la frattura è avvenuta con limitata strizione; normalmente una frattura di questo tipo avviene secondo lo schema di Figura 3.8:

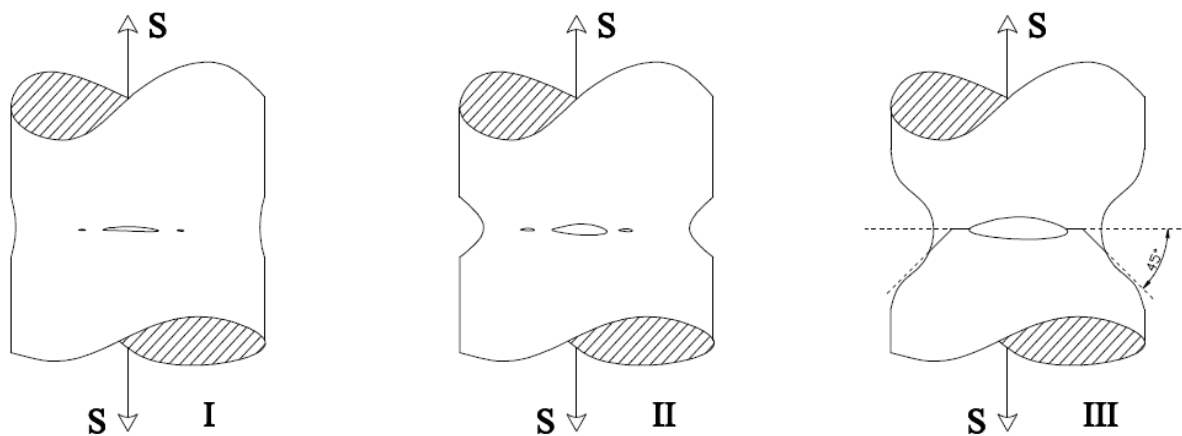


Figura 3.8: nucleazione e sviluppo di una cricca in un materiale duttile.

all'inizio, subito dopo la formazione della strizione, si formano all'interno del campione cavità o microvuoti, che con il procedere della deformazione si accrescono e coalescono a formare cricche ellittiche, perpendicolari alla direzione del carico.



La rottura finale avviene per propagazione di una cricca sul perimetro della zona strizionata, propagazione che avviene su un piano a 45° con l'asse della sollecitazione. Per questo motivo si forma la classica configurazione a coppa e cono tanto tipico della rottura duttile.

Si è visto come micro-cricche possono influenzare la rottura dei materiali metallici sia in maniera fragile che duttile. Anche piccole inclusioni possono avere grandi effetti su tale fenomeno. Infatti quando vi è uno scorrimento tra piani adiacenti le dislocazioni tendono ad impilarsi nei pressi di tali inclusioni. Assumendo che l'inclusione sia ad elevata resistenza e non viene tagliata dalle dislocazioni una piccola fessura si creerà all'interfaccia. Tale micro-fessura fungerà da concentratore delle tensioni.

Lo stesso ruolo giocano i bordi di grano risultando a più elevata resistenza rispetto al resto del volume del metallo.

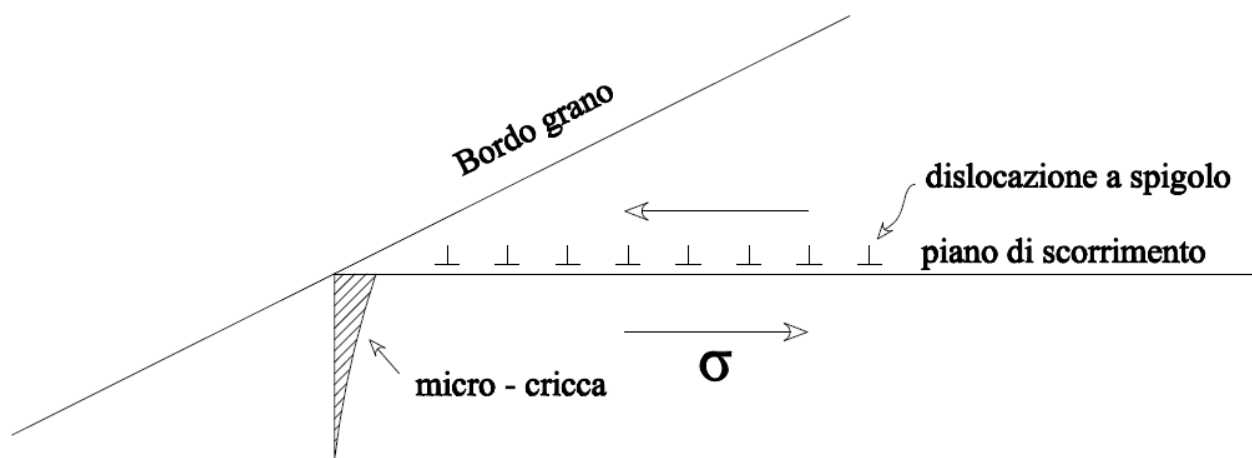


Figura 3.9: nucleazione di una cricca a bordo grano.

Inoltre risulta che tale fenomeno è amplificato nei punti tripli di giunzione e nei punti di intersezione di piani preferenziali di scorrimento.

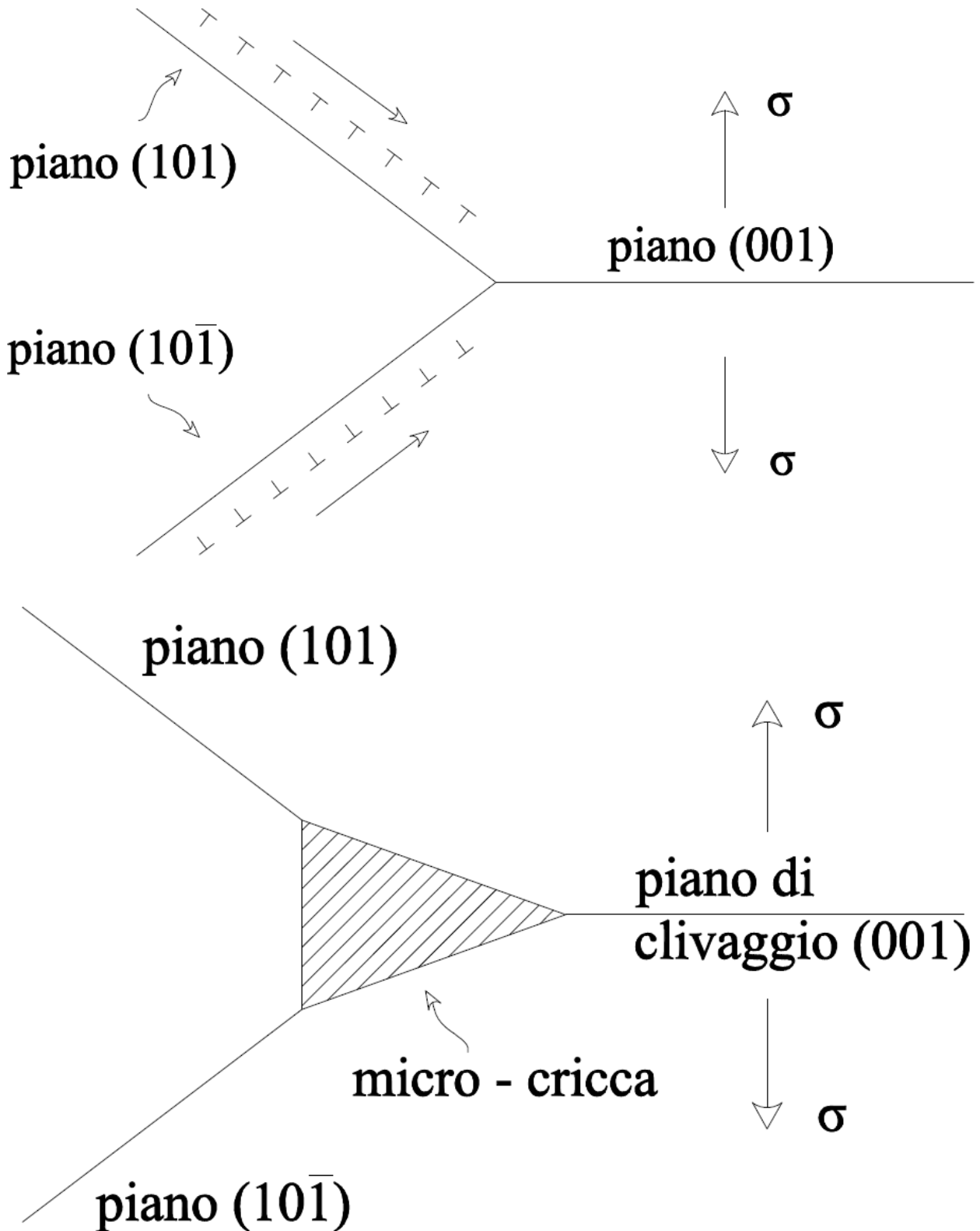


Figura 3.10: formazione di una cricca in un punto triplo di giunzione.

Si può valutare la resistenza teorica dei materiali metallici considerando la modalità di rottura per clivaggio. Tale resistenza è legata alle forze dei legami atomici, alla temperatura e allo stato tensionale. Il clivaggio prevede la separazione dei legami atomici su un intero piano perpendicolare alla direzione di applicazione del carico. Dal punto di vista ideale consideriamo un cristallo privo di

difetti e senza effetti di concentrazione delle tensioni all'apice del difetto. Gli atomi si separano della stessa distanza simultaneamente raggiungendo una distanza critica.

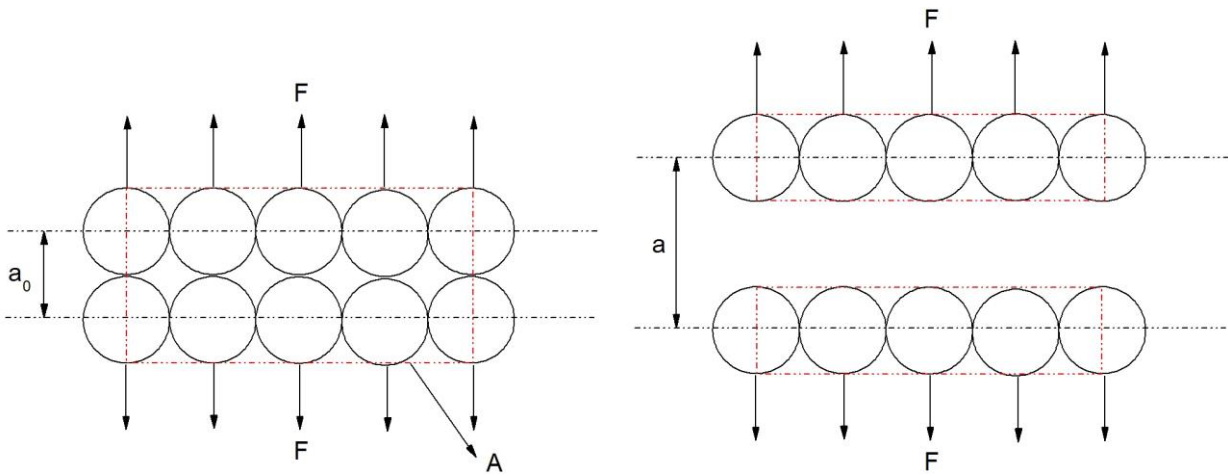


Figura 3.11: spostamento degl'atomi tra due piani di clivaggio.

La tensione necessaria per separare i due piani atomici varia in funzione della distanza tra i piani, si dimostra che sotto le condizioni predette l'andamento è sinusoidale:

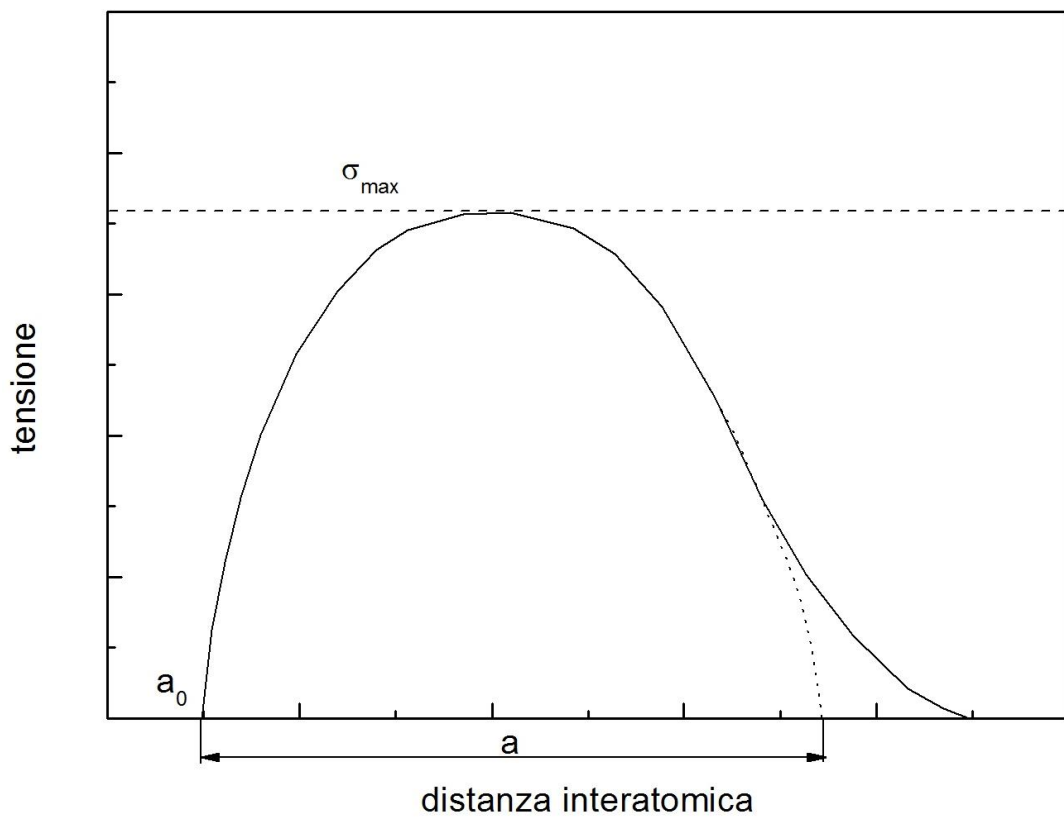


Figura 3.12: variazione della tensione in funzione della distanza interatomica.

Applicando la legge di Hook si può scrivere:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E \quad (3.10)$$

se assumiamo che la deformazione interessi esclusivamente due piani adiacenti si può definire:

$$d\varepsilon = \frac{dx}{a_0} \quad (3.11)$$

che sostituite nella precedente:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{d\sigma}{dx/a_0} = E \quad (3.12)$$

Quindi:

$$a_0 \frac{d\sigma}{dx} = E \quad (3.13)$$

Ora:

$$\sigma = K \sin \frac{2\pi}{2a} (x - a_0) \quad (3.14)$$

Otteniamo:

$$a_0 \frac{d\sigma}{dx} = K \frac{\pi}{a} a_0 \cos \frac{2\pi}{2a} (x - a_0) = E \quad (3.15)$$

$$K = \frac{E}{\pi} \frac{a}{a_0} \quad (3.16)$$

Che equivale alla massima tensione di clivaggio che si ottiene ponendo il seno uguale ad 1.

Il termine  $a$  non è noto ma va calcolato, Polanyi e Orowan hanno calcolato tale termine eguagliando l'area sottesa dalla curva tensione-distanza all'energia della superficie creata:

$$\int_{a_0}^{a_0+a} \sigma dx = 2\gamma = \int_{a_0}^{a_0+a} K \sin \frac{\pi}{a} (x - a_0) dx \quad (3.17)$$

ora:

$$\int \sin ay dy = -\frac{1}{a} \cos ay \text{ ed essendo } y = x - a_0 \text{ si ottiene:}$$

$dx = dy$ , per cui:

$$K \int_0^a \sin \frac{\pi}{a} y dy = K \left( -\frac{a}{\pi} \cos \pi + \frac{a}{\pi} \cos 0 \right) \text{ quindi:}$$

$$K \frac{2a}{\pi} = 2\gamma \text{ ed infine:}$$

$$a = \frac{\pi\gamma}{K} \quad (3.18)$$

La tensione teorica di clivaggio è il valore massimo della tensione espressa nella (3.14) quando il seno è uguale a 1:

$$\sigma_{\max} = K = \frac{E}{\pi} \frac{a}{a_0}, \text{ sostituendo il valore ottenuto per } a:$$

$$\sigma_{\max} = K = \frac{E\gamma}{Ka_0}, \text{ quindi}$$

$$\sigma_{\max}^2 = \frac{E\gamma}{a_0} \text{ ed infine:}$$

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{E\gamma}{a_0}}$$

La deformazione di clivaggio è:

$$\varepsilon_{\max} = \frac{a}{2a_0} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{Ea_0}} = \frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{\max}}{E} \quad (3.15)$$

La resistenza al clivaggio è quindi maggiore quanto più è elevata la rigidezza del materiale e quanto più basso è il valore del parametro reticolare.

In questo modello, l'energia di superficie può essere espressa come:

$\gamma = \frac{Ka}{\pi} = \frac{E}{a_0} \left( \frac{a}{\pi} \right)^2$ , la distanza di separazione critica  $a$  è dello stesso ordine di grandezza di  $a_0$  per cui l'energia può essere stimata come:

$$\gamma = \frac{Ea_0}{\pi^2} \cong \frac{Ea_0}{10}, \text{ quindi la tensione massima di clivaggio diviene:}$$

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{E\gamma}{a_0}} \cong \frac{E}{\pi}$$

Valori tipici della tensione massima di clivaggio, calcolata con l'espressione precedente sono presentati nella seguente tabella:

Materiale	Direzione	E(GPa)	$\gamma(\text{mJm}^{-2})$	$\sigma_{\text{max}}(\text{MPa})$
Ag	<111>	121	1130	24
Ag	<100>	44	1130	16
Au	<111>	110	1350	27
Ni	<100>	138	1730	37
W	<100>	390	3000	61
Fe- $\alpha$	<100>	132	2000	30

### Fondamenti di meccanica della frattura

*Teoria di Griffith:* Tale teoria esprime i criteri termodinamici ed energetici che portano alla frattura dei materiali senza tenere in conto quali siano le cause che producono la frattura stessa. Il concetto basilare e' che la cricca si propaga nel momento in cui l'energia elastica rilasciata all'apice della cricca supera l'energia necessaria alla propagazione.

Introducendo una cricca di lunghezza  $2a$  in un corpo considerato infinito di spessore  $B$  e sollecitato in trazione, le tensioni elastiche intorno alla cricca si rilassano riducendo l'energia potenziale immagazzinata nel corpo ( $U_E$ ).

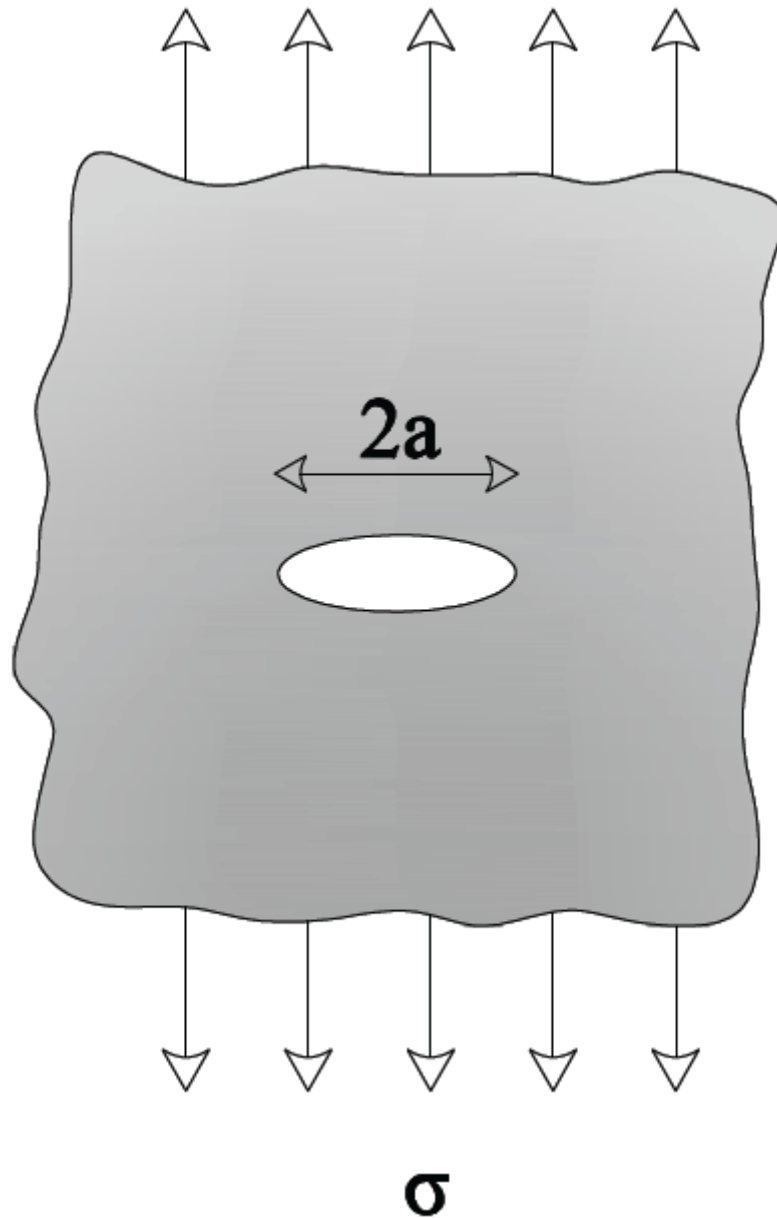


Figura 3.13: presenza di un difetto ellittico in un solido sottoposto a trazione.

Un extra-superficie  $e'$  è creata dalla cricca ( $U_S$ ). Se il corpo è fisso non viene fatto nessun lavoro dalle forze esterne ( $U_F=0$ ).

$$U(a) = U_F + U_E + U_S \quad (3.16)$$

All'equilibrio:

$$\frac{dU}{da} = \frac{dU_E}{da} + \frac{dU_S}{da} = 0 \quad (3.17)$$

I cambi nell'energia potenziale sono dovuti alle tensioni che si concentrano intorno alla cricca:

$$U_E = -\frac{\pi\sigma^2 a^2 B}{E} \quad (3.18)$$

Il lavoro necessario a farla propagare e':

$$U_S = 4aB\gamma_S \quad (3.19)$$

Dove  $\gamma_S$  e' l'energia superficiale:

$$2\gamma_S = \frac{\pi\sigma^2 a}{E} \quad (3.20)$$

Sostituendo nell'equazione dell'equilibrio:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2\gamma_S E}{\pi a}} \quad (3.21)$$

Per i materiali duttili interviene anche il lavoro di deformazione plastica e l'equazione diventa:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(2\gamma_S + \gamma_p)E}{\pi a}} \quad (3.22)$$

Si definisce velocita' di rilassamento dell'energia:

$$G = -\frac{dU}{dA} = -\frac{dU}{2Bda} = -\frac{\pi\sigma^2 a}{E} \quad (3.23)$$

La cricca si propaga quando:

$$G = G_c = 2\gamma_S + \gamma_p \quad (3.24)$$

$G_C$  e' una costante del materiale ed e' una misura della tenacita' a frattura.

*Transizione duttile-fragile:* Possiamo definire una combinazione di fattori meccanici e microstrutturali in funzione dei quali, la duttilita' macroscopica dei materiali dipende dall'abilita' di esibire uno snervamento generalizzato prima della rottura senza che la propagazione di una cricca ecceda un valore critico che porta alla rottura per clivaggio. Si puo', per ogni materiale, individuare una temperatura  $T_{YG}$  alla quale il clivaggio coincide con lo snervamento generalizzato. In altre parole, la transizione duttile fragile rappresenta il passaggio da uno snervamento generalizzato alla propagazione di una singola cricca.

Se diagrammiamo l'energia assorbita durante la frattura in funzione della temperatura si ottiene un grafico del tipo in figura 3.14.



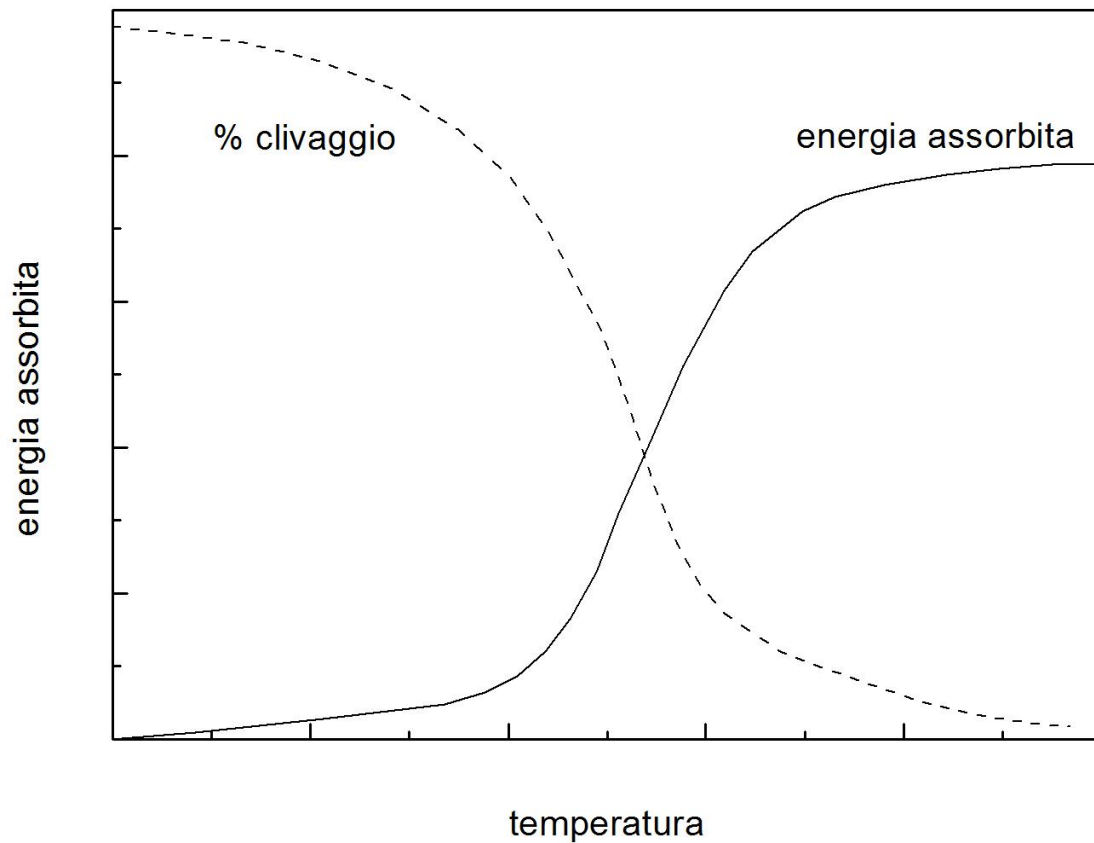


Figura 3.14: variazione dell'energia assorbita e della probabilità di frattura per clivaggio al variare della temperatura di deformazione.

I fattori che favoriscono una rottura per clivaggio sono:

- alto carico di snervamento, che corrisponde ad una elevata energia accumulata nel materiale prima della rottura,
- dimensione media dei grani elevata,
- presenza elevata di particelle di seconda fase,
- piccoli spessori del materiale, la deformazione si avvicina molto a una deformazione piana.

Quando avviene la classica frattura duttile a coppa e cono?

Quando si raggiunge il punto di instabilità plastica, la velocità di incrudimento non compensa più l'aumento di tensione man mano che la sezione si riduce.

Microvuoti si formano e coalescono inizialmente nella parte centrale del materiale dove esiste uno stato di sollecitazione triassiale.

La coalescenza porta alla formazione di una cricca interna circolare che cresce e si propaga lungo i piani preferenziali di scorrimento nei pressi della superficie dove lo stato tensionale non è più triassiale.

Più è difficile la formazione di microvuoti, più è duttile il materiale (metalli puri). Questo perché i microvuoti nucleano preferenzialmente nei pressi delle particelle di seconda fase per decoesione delle interfacce con la matrice, o per frattura delle seconde fasi e delle inclusioni.

Molti sono i modelli sviluppati per la comprensione del fenomeno e sono principalmente legati all'impilamento delle dislocazioni nei pressi dei precipitati di seconda fase ma non spiegano perfettamente ciò che avviene in presenza di particelle di grosse dimensioni. Questo perché le particelle di grosse dimensioni sono quelle con la più alta energia di interfaccia e quelle con il più alto incentivo a ridurre il rapporto superficie-volume, quindi alle interfacce matrice-particelle si ha una nucleazione e una crescita molto più rapide man mano che le dimensioni delle particelle aumentano.

Inoltre, a parità di flusso plastico nella matrice, il materiale è più sensibile alla nucleazione e propagazione di cricche alle interfacce quanto più grandi sono le dimensioni delle particelle.

*Clivaggio:* La frattura per clivaggio è caratterizzata da una cricca piana transgranulare che si propaga cambiando piano di giacitura formando una superficie a gradini. Le sfaccettature corrispondono a singoli grani o nei monocristalli a differenti piani di scorrimento.

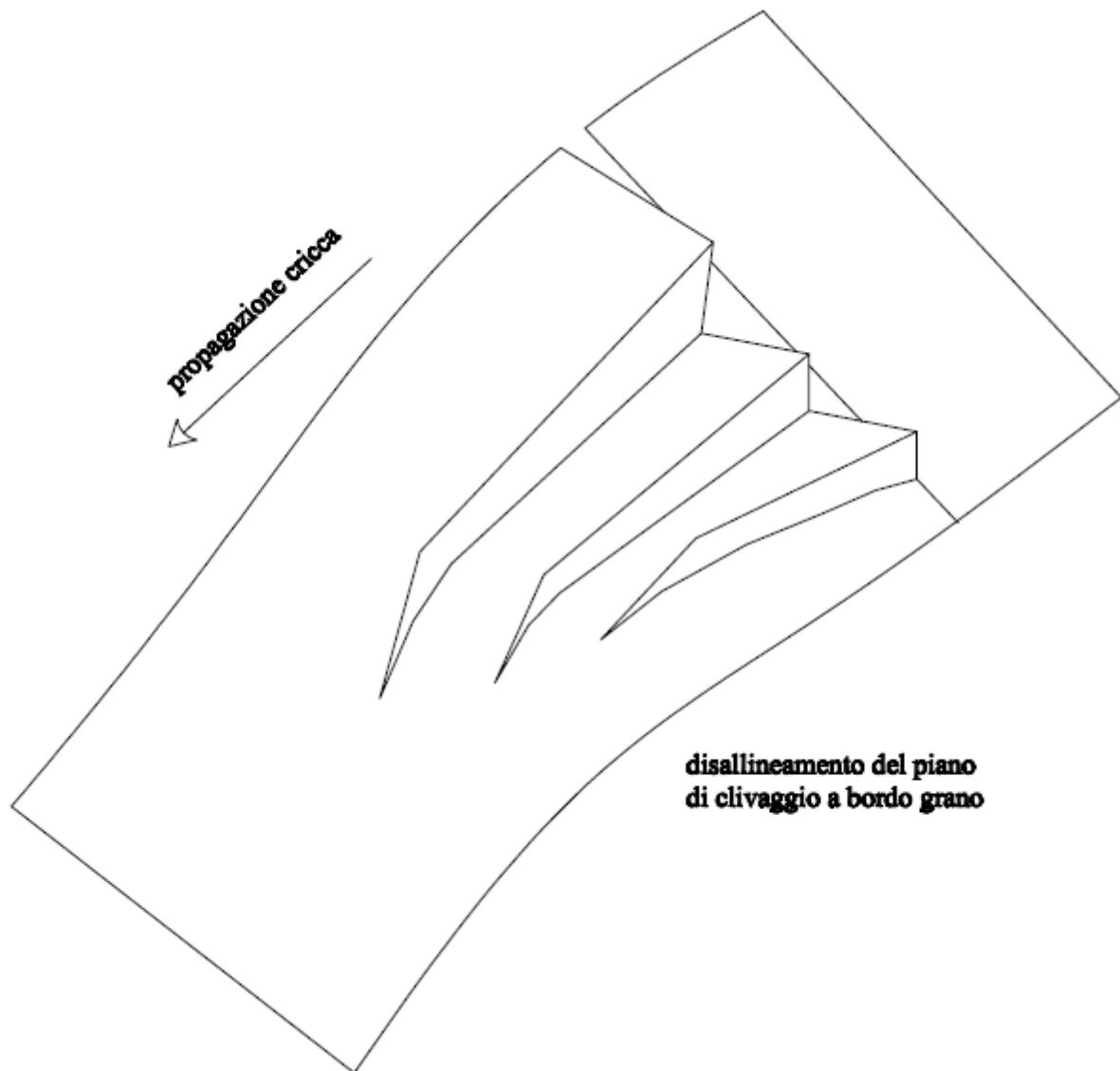


Figura 3.15: modalità di propagazione macroscopica per clivaggio.

I gradini poi convergono a formare un'unica superficie lungo la direzione di propagazione.

Questi si formano al bordo di grano quando il piano di clivaggio di un grano è differente da quello del grano adiacente, e quindi si ha la sequenza di gradini. Questo fenomeno diminuisce gradualmente man mano che la cricca si propaga.

I fattori che principalmente favoriscono una frattura di questo tipo sono:

- alto carico di snervamento del materiale,
- basso numero di sistemi di scorrimento attivi (strutture HCP, BCC, bassa temperatura),
- deformazione piana e deformazioni molto rapide,
- dimensione media dei grani elevata.

All'apice della cricca in condizioni reali la tensione effettiva non supera mai di 3-4 volte quella di snervamento, e la resistenza teorica della cricca e' pari a:

$$\sigma_c \approx \frac{E}{\pi} \quad (3.25)$$

Questo porta a rendere non comune la frattura per clivaggio nei materiali metallici.

In condizioni di deformazione piana, per il criterio di Griffith, la lunghezza critica perche' una cricca si propaghi e':

$$a_{cr} = \frac{2E}{\pi(1-\nu^2)\sigma_f^2} = 0.3\mu m \quad (3.26)$$

Ora perche' una cricca si propaghi e' necessaria una certa plasticita' al suo apice, e per spiegare il fenomeno sono stati proposti diversi meccanismi.

Usando trattazioni energetiche, G varia generalmente con le dimensioni della cricca. A parita' di condizioni di sollecitazione G aumenta con l'aumentare delle dimensioni della cricca.

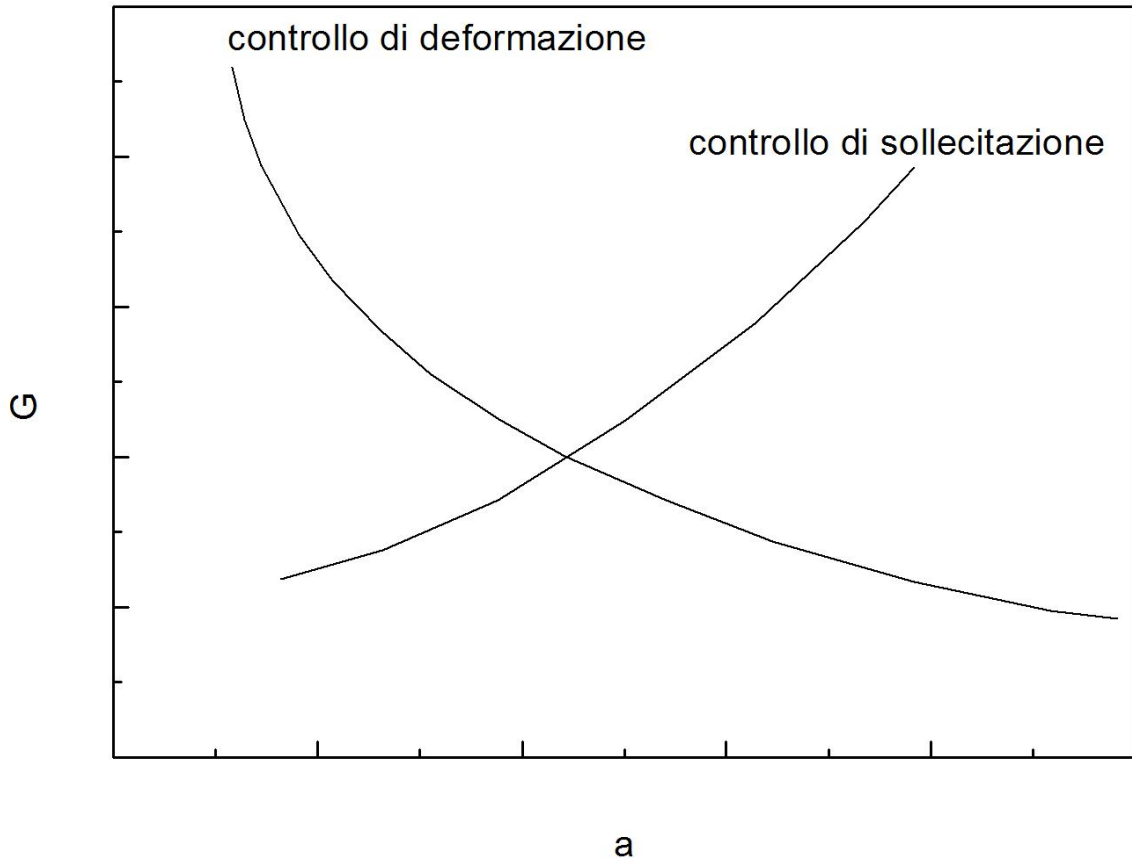


Figura 3.16: variazione dell'energia di rilassamento con la dimensione della cricca.

Considerando la resistenza del materiale alla propagazione ( $R$ ), questa varia al variare delle dimensioni della cricca in presenza di lavoro plastico (materiale duttile).

In particolare diminuisce all'aumentare della sensibilita' alla velocita' di deformazione del materiale dal momento che in tal modo si riducono le dimensioni della zona plastica nell'intorno della cricca e questa si propaga piu' rapidamente.

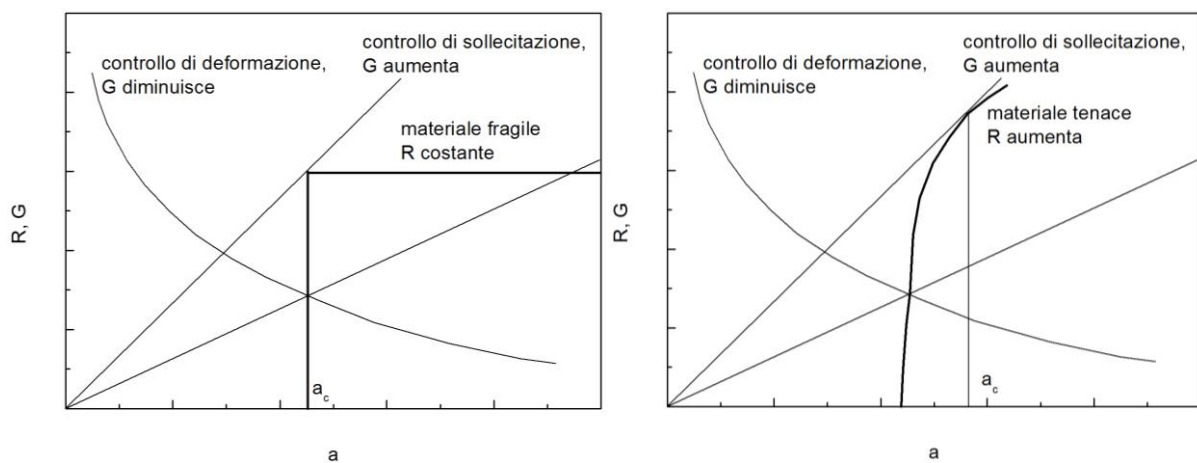


Figura 3.17: variazione dell'energia di rilassamento con la dimensione della cricca per materiali fragili e per materiali duttili.

Perche' ci sia propagazione della cricca  $G > R$ ,

Ma visto che  $G$  aumenta con l'aumentare delle dimensioni della cricca, se:

$$\frac{dG}{da} > \frac{dR}{da} \quad (3.27)$$

La cricca si propaga molto rapidamente.

Finche':

$$\frac{dG}{da} = \frac{dR}{da} \quad (3.28)$$

La cricca si propaga in maniera controllata (stabile).

*Meccanismi di frattura lineare elastica:* Quando in un materiale nuclea una cricca, la tensione nel suo immediato intorno aumenta. Per questo motivo si dice che la presenza di un difetto rappresenta un concentratore di tensione. Per alcuni casi tipici di geometria dei difetti si puo' calcolare la velocita' di rilassamento dell'energia elastica e quindi la tensione elastica nelle diverse configurazioni.

Consideriamo un foro circolare in un materiale sollecitato

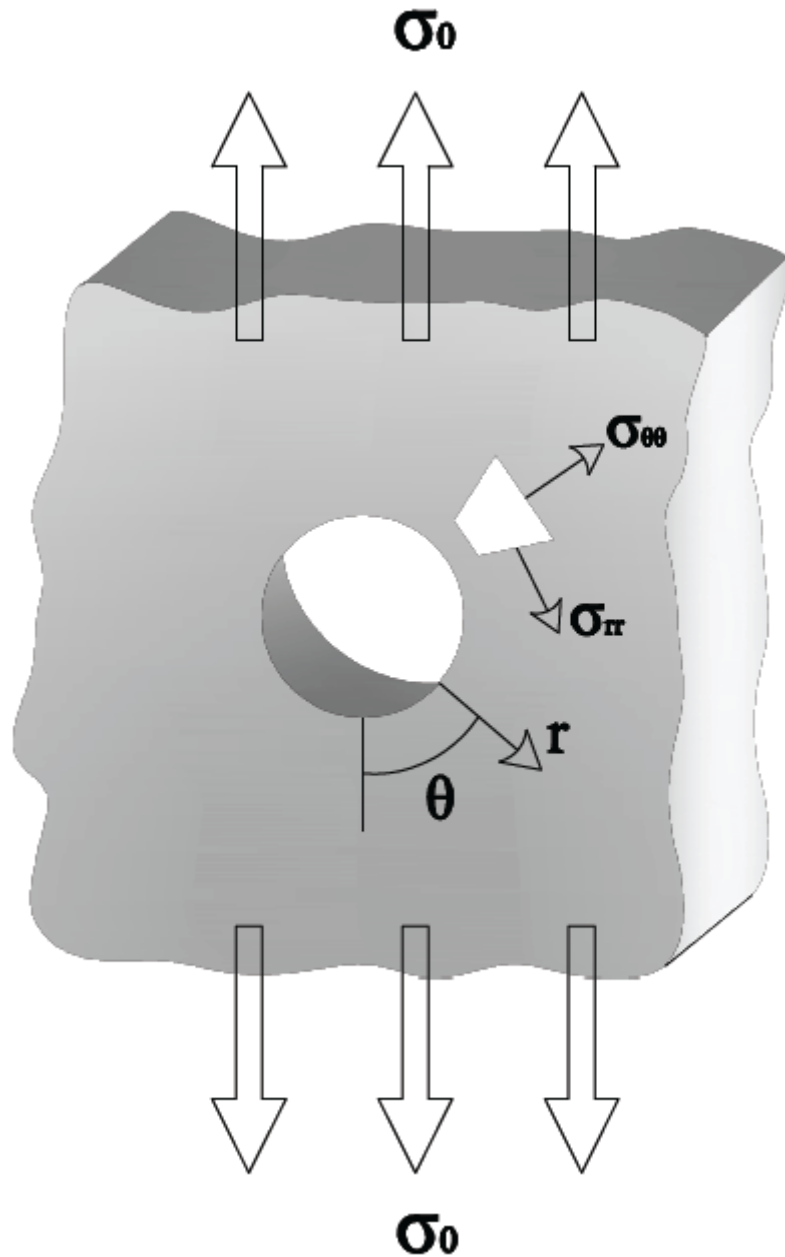


Figura 3.18: presenza di un difetto circolare in un solido sottoposto a trazione.

Con riferimento alla figura, in coordinate polari le tensioni sono date da:

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma_0}{2} \left\{ 1 + \frac{r_0^2}{r^2} + \left( 1 + 3\frac{r_0^4}{r^4} - 4\frac{r_0^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \right\} \quad (3.29)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma_0}{2} \left\{ 1 + \frac{r_0^2}{r^2} - \left( 1 + 3\frac{r_0^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right\} \quad (3.30)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\sigma_0}{2} \left\{ \left( 1 - 3\frac{r_0^4}{r^4} + 2\frac{r_0^2}{r^2} \right) \sin 2\theta \right\} \quad (3.31)$$

Sostituendo a  $r_0$  e a  $q$ , 90 gradi e 0 gradi si ottiene il massimo e il minimo della tensione radiale  $\sigma_{\theta\theta}$ .

Questi risultano rispettivamente  $2\sigma_0$  e  $-\sigma_0$ .

In definitiva, la presenza di un foro circolare amplifica la tensione di sollecitazione al bordo del difetto di un fattore 3 in una dimensione e introduce una tensione di compressione pari alla entità della sollecitazione.

Potendo applicare il principio di sovrapposizione nel caso di deformazioni elastiche e quindi piccole, la tensione effettiva nell'intorno del difetto è:

$$3\sigma_0 - \sigma_0 = 2\sigma_0 \quad (3.32)$$

Un altro caso molto tipico ed utile da analizzare è la presenza di un difetto ellittico.

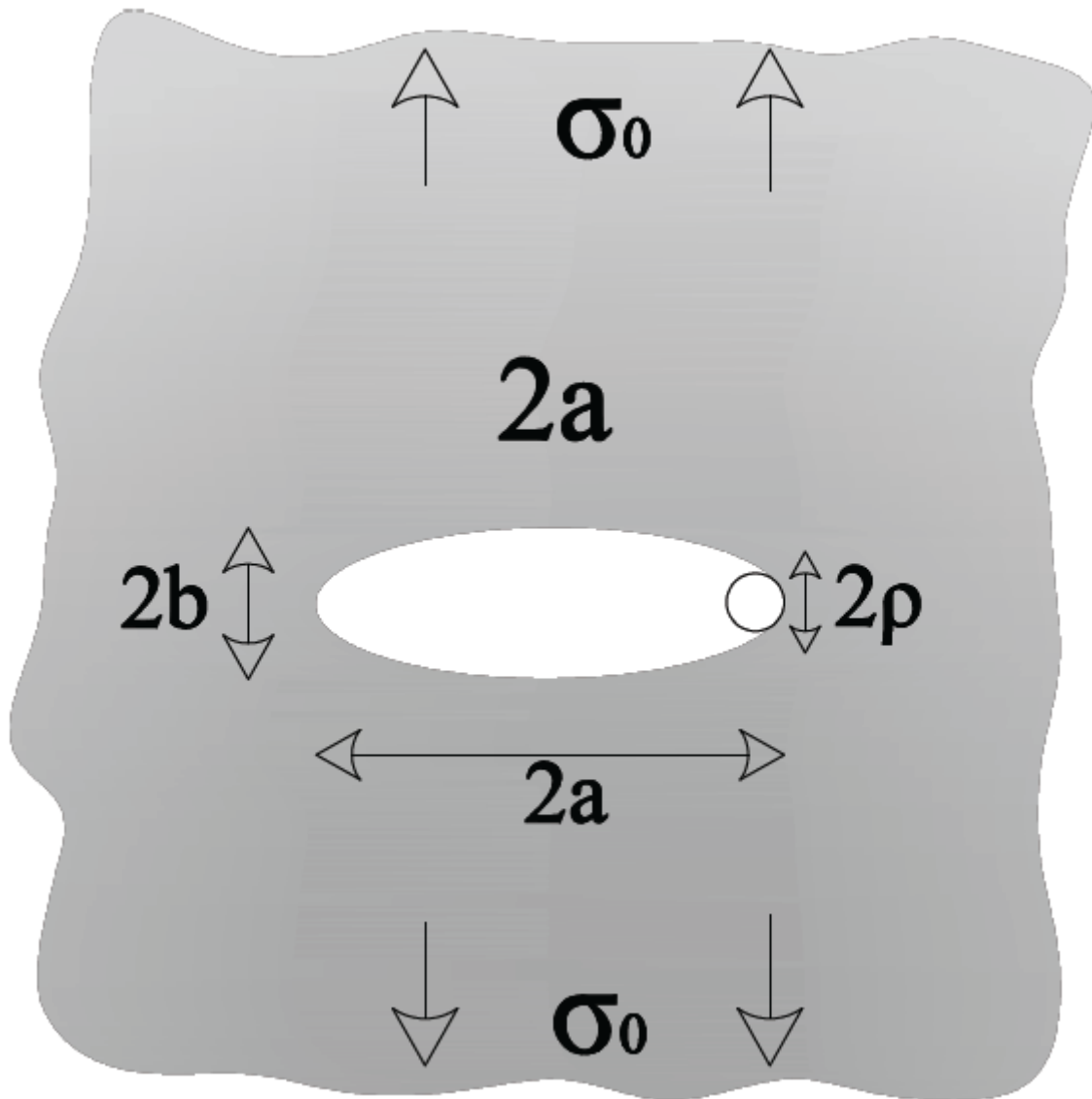


Figura 3.19: difetto ellittico.



In tal caso le tensioni sono date da:

$$\sigma_{\max} = \sigma_0 \left( 1 + \frac{2a}{b} \right) \quad (3.33)$$

oppure con:

$$\rho = \frac{b^2}{a} \quad (3.34)$$

e per  $a \gg b$

$$\sigma_{\max} = \sigma_0 \left( 1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}} \right) \quad (3.35)$$

Il rapporto  $\sigma_{\max}/\sigma_0$  e' detto fattore di concentrazione delle tensioni  $k_t$ .

Per ricche sottili

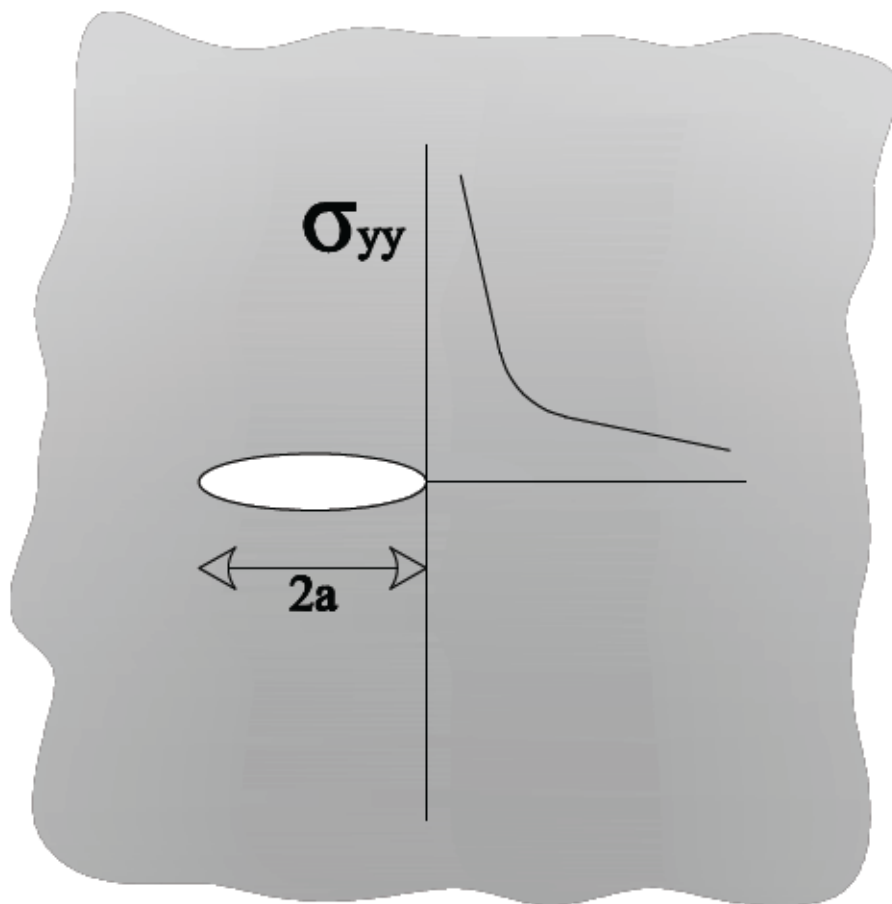


Figura 3.20: variazione della  $\sigma_{yy}$  rispetto al centro di una cricca ellittica.

$$\sigma_{yy} = \frac{\sigma_0 \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left\{\frac{\theta}{2}\right\} \left[ 1 + \sin\left\{\frac{\theta}{2}\right\} \sin\left\{\frac{3\theta}{2}\right\} \right] \quad (3.36)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_0 \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left\{\frac{\theta}{2}\right\} \left[ 1 - \sin\left\{\frac{\theta}{2}\right\} \sin\left\{\frac{3\theta}{2}\right\} \right] \quad (3.37)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_0 \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left\{\frac{\theta}{2}\right\} \cos\left\{\frac{\theta}{2}\right\} \cos\left\{\frac{3\theta}{2}\right\} \quad (3.38)$$

e il fattore di intensificazione delle tensioni risulta:

$$K = \sigma_0 \sqrt{\pi a} \quad (3.39)$$

Per  $q$  uguale a zero la tensione che tende ad aprire la cricca assume il suo valore massimo:

$$\sigma_{yy} = \frac{\sigma_0 \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \quad (3.40)$$

Si definisce tenacità a frattura:

$$K_{IC} = \sigma_f \sqrt{\pi a} \quad (3.41)$$

Per una data tensione di sollecitazione definisce la massima lunghezza di cricca o a lunghezza fissa la tensione minima per cui la cricca si propaga.

I parametri fondamentali in tale analisi sono quindi:

Fattore di concentrazione delle tensioni:  $k_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0}$

Fattore di intensificazione delle tensioni [Pa\*m<sup>1/2</sup>]:  $K = \sigma \sqrt{\pi a}$

Tenacità a frattura [Pa\*m<sup>1/2</sup>]:  $K_{IC} = \sigma_f \sqrt{\pi a}$

Le relazioni descritte precedentemente sono state ricavate considerando un carico applicato perpendicolarmente rispetto al difetto.

Generalmente le condizioni di sollecitazione di un componente meccanico sono più complesse.

Schematicamente, si distinguono tre differenti modi di apertura di una cricca chiamati con una 'straordinaria' immaginazione I, II, III.

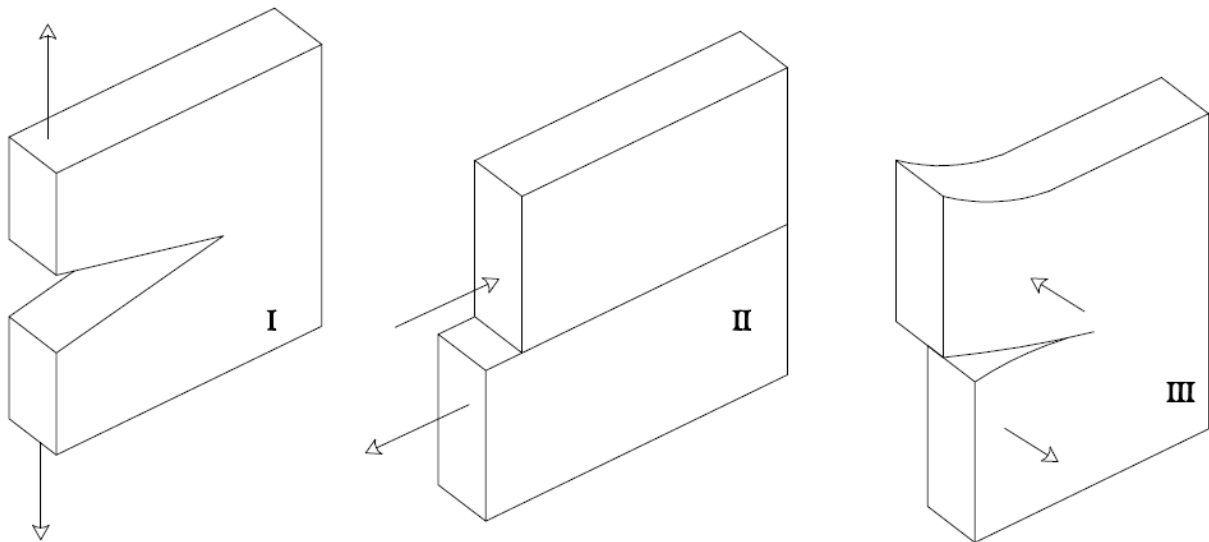


Figura 3.21: modi di apertura I, II e III.

La combinazione di questi tre descrive ogni tipo di condizione di sollecitazione.

Ora, l'energia di rilassamento e' funzione dello stato tenso-deformativo.

Per lo stato di sollecitazione piana:

$$G = \frac{K^2}{E} \quad (3.42)$$

Per lo stato di deformazione piana:

$$G = \frac{K^2}{E}(1 - \nu^2) \quad (3.43)$$

Quindi per ognuno dei modi I, II, III l'unica cosa che variera' sara' K.

Il cambiamento di energia nel corpo puo' essere espressa esclusivamente attraverso l'individuazione del fattore di intensificazione delle tensioni.

Considerando tutti i modi di apertura di una cricca, le relazioni generali che legano l'energia ai fattori di intensificazione delle tensioni sono per lo stato di sollecitazione piana:

$$EG = K_I^2 + K_{II}^2 + (1 + \nu)K_{III}^2 \quad (3.44)$$

Per lo stato di deformazione piana:

$$EG = (1 + \nu^2)K_I^2 + (1 + \nu^2)K_{II}^2 + (1 + \nu)K_{III}^2 \quad (3.45)$$

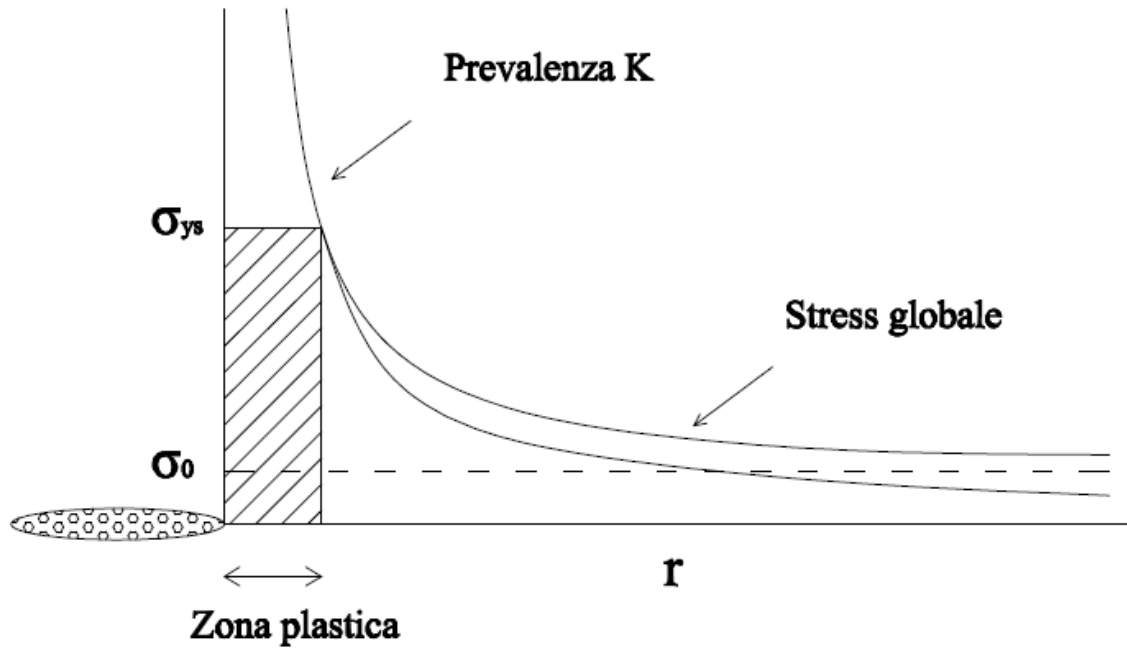


Figura 3.22: tensione risultante rispetto alla tensione di sollecitazione. Per  $\sigma_0 \ll \sigma_{ys}$  la zona plastica è influenzata dall'effetto di concentrazione della tensione della cricca.

In una zona molto prossima all'apice la propagazione è governata dal valore di  $K$ , man mano che ci si allontana l'effetto della concentrazione tensionale diminuisce approssimandosi al valore di sollecitazione media agente sul componente.

Per le cricche inclinate tra 0 e 90 gradi rispetto alla direzione di sollecitazione dobbiamo utilizzare il principio di sovrapposizione degli effetti.

Per una cricca inclinata a 45 gradi rispetto alla direzione di sollecitazione vogliamo trovare l'angolo  $\phi$  al quale la cricca si propagherà.

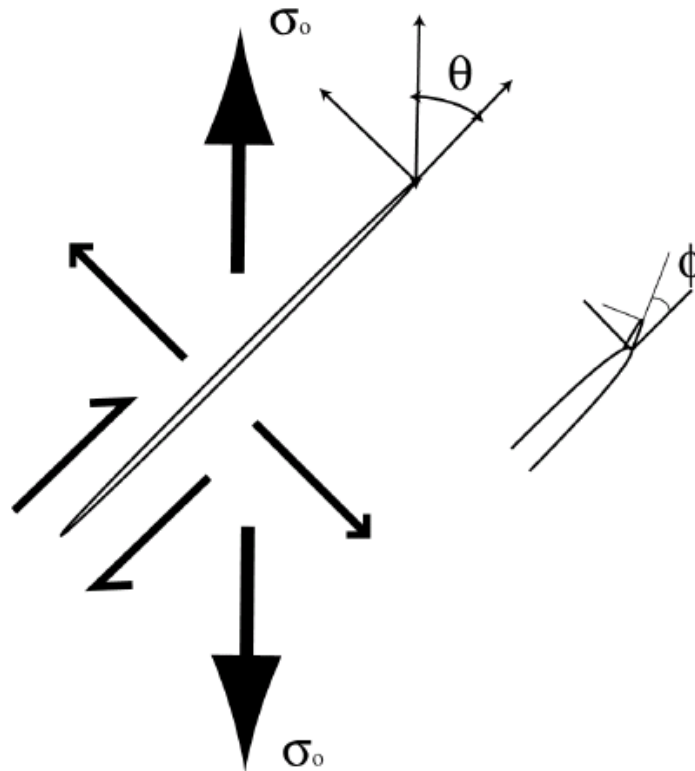


Figura 3.23: cricca inclinata di un angolo  $\theta$  rispetto alla direzione di sollecitazione.

La tensione agente sulla cricca può essere scomposta in una componente agente perpendicolarmente al piano della cricca, Modo I, e una componente agente parallelamente al piano della cricca, Modo II.

Il campo tensionale può essere considerato separatamente per ognuno dei due modi e poi sommato.

Utilizzando coordinate polari, le tensioni radiali per i due Modi sono:

$$\sigma_{rr} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \left( \cos\left\{\frac{\theta}{2}\right\} \left[ 1 + \sin^2\left\{\frac{\theta}{2}\right\} \right] \right) \quad (3.46)$$

Modo I:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \left( \cos^3\left\{\frac{\theta}{2}\right\} \right) \quad (3.47)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \left( \sin\left\{\frac{\theta}{2}\right\} \cos^2\left\{\frac{\theta}{2}\right\} \right) \quad (3.48)$$

e

$$\sigma_{rr} = \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \left( \sin\left\{\frac{\theta}{2}\right\} \left[ 1 - 3\sin^2\left\{\frac{\theta}{2}\right\} \right] \right) \quad (3.49)$$

$$\text{Modo II: } \sigma_{\theta\theta} = \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \left( -3 \sin \left\{ \frac{\theta}{2} \right\} \cos^2 \left\{ \frac{\theta}{2} \right\} \right) \quad (3.50)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{\frac{1}{2}}} \left( \cos \left\{ \frac{\theta}{2} \right\} \left[ 1 - 3 \sin^2 \left\{ \frac{\theta}{2} \right\} \right] \right) \quad (3.51)$$

Ora consideriamo le tensioni che fanno propagare la cricca nei due Modi distinti:

$$\text{per sollecitazioni ortogonali: } \sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos^3 \frac{\phi}{2} \quad (3.52)$$

$$\text{per sollecitazioni parallele: } \sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \left[ -3 \sin \frac{\phi}{2} \cos^2 \frac{\phi}{2} \right] \quad (3.53)$$

La tensione totale che fara' propagare la cricca nel Modo I e':

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos^2 \frac{\phi}{2} \left[ \cos \frac{\phi}{2} - 3 \sin \frac{\phi}{2} \right] \quad (3.54)$$

E nel Modo II:

$$\sigma_{r\theta} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \left( \sin \frac{\phi}{2} \cos^2 \frac{\phi}{2} + \cos \frac{\phi}{2} \left[ 1 - 3 \sin^2 \frac{\phi}{2} \right] \right) \quad (3.55)$$

Ora convertendo in fattori di intensificazione delle tensioni:

$$K_I(\phi) = \sigma_{\theta\theta} \sqrt{\pi a} \quad (3.56)$$

$$K_{II}(\phi) = \sigma_{r\theta} \sqrt{\pi a} \quad (3.57)$$

Ora bisogna trovare il valore di  $\phi$  per cui e' massima la velocita' di rilassamento dell'energia:

$$G(\phi) = \frac{K_I^2}{E} + \frac{K_{II}^2}{E} \quad (3.58)$$

Grafichiamo gli andamenti:

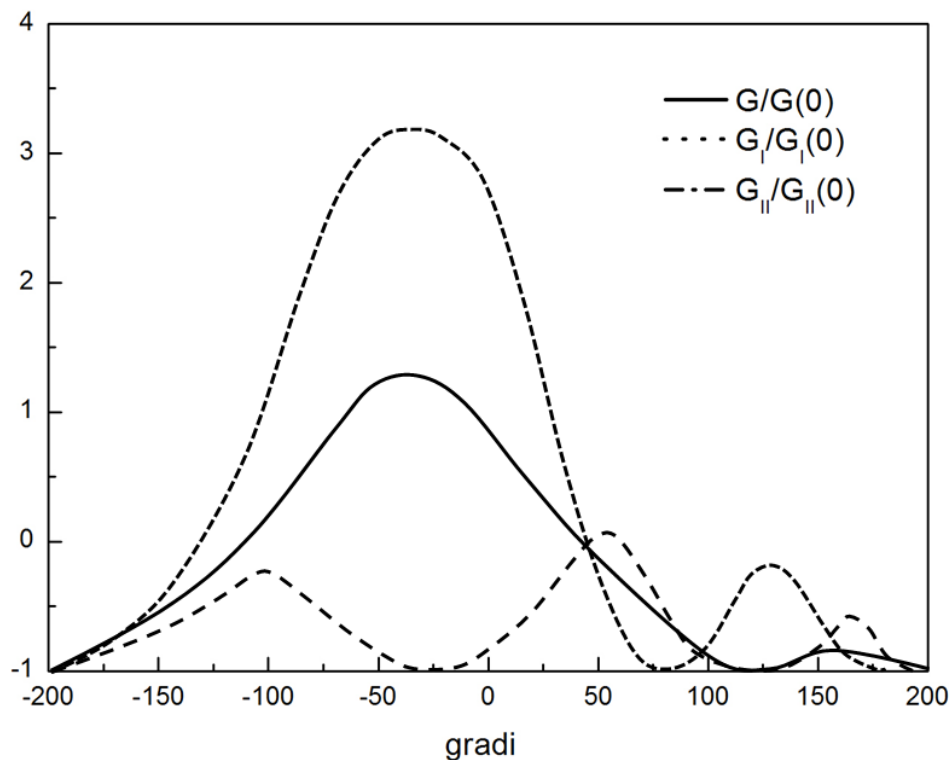


Figura 3.24: andamento delle energie di rilassamento al variare dell'angolo di inclinazione della cricca.

$G_I$  presenta un massimo per -55 gradi.

Anche se  $G_{II}$  presenta il suo minimo la somma è massima per quest'angolo.

La propagazione è fortemente dominata dal Modo I e rallentata dalla presenza del Modo II e la cricca si propagerà per un angolo  $\phi$  pari a -55 gradi rispetto alla direzione di sollecitazione.

*Dimensioni della zona plastica nell'intorno di una cricca:* Un piccolo volume all'apice della cricca supera il carico di snervamento e quindi si deforma plasticamente.

Questo ha due conseguenze:

-la deformazione nella zona plastica fa aumentare rapidamente il lavoro per propagare la cricca,

-l'energia elastica nominale immagazzinata nella zona plastica, non si rilassa man mano che la cricca si propaga, quindi per una zona plastica di piccole dimensioni possiamo applicare la meccanica della frattura lineare elastica.

Dobbiamo calcolare le dimensioni della zona plastica per cui è valida tale trattazione.

Considerando il limite di tale zona come quello dove la tensione eguaglia quella di snervamento si ottiene:

$$\sigma_{ys} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r_y}} \quad (3.59)$$

E quindi:

$$r_y = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2 \quad (3.60)$$

Tale espressione non tiene conto della redistribuzione delle tensioni da parte del materiale snervato all'apice della cricca.

Ora, l'effetto del flusso plastico e' di aprire la cricca maggiormente di quanto si puo' predire con una semplice trattazione elastica, questo porta la dimensione a ad essere maggiore:

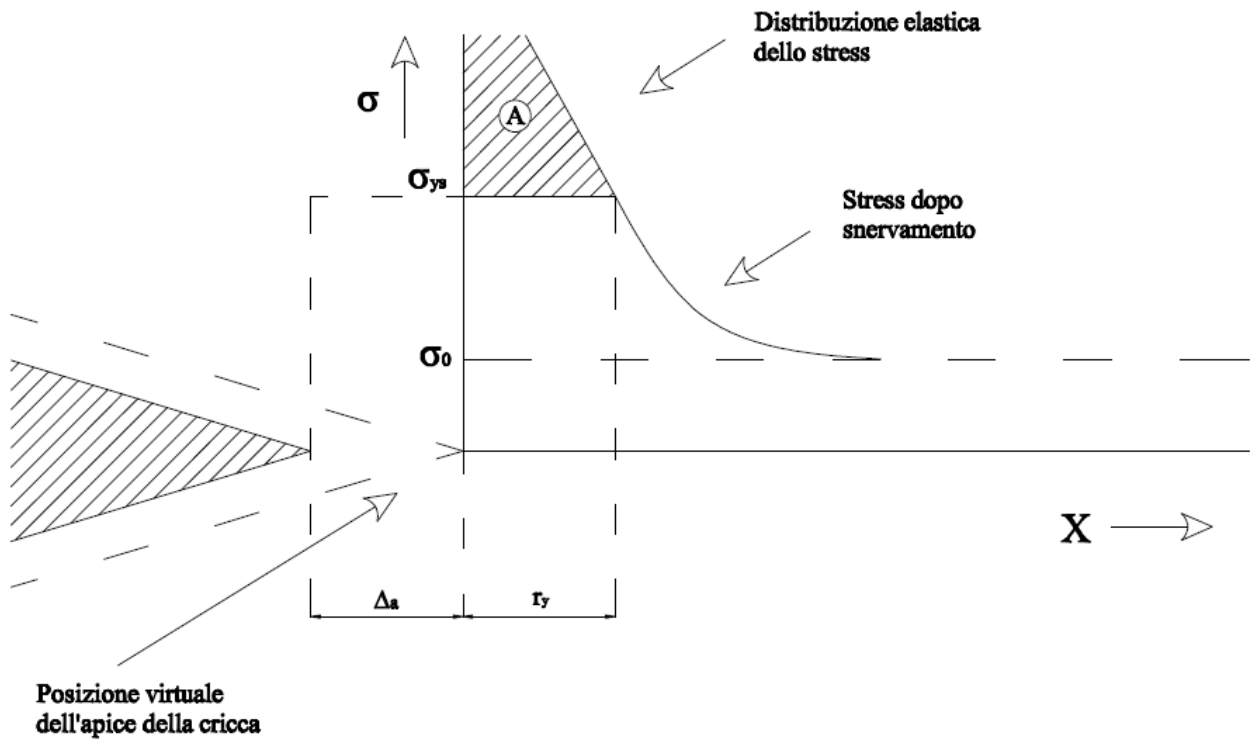


Figura 3.25: lunghezza effettiva della cricca.

L'apice di tale cricca nominale lavora come il centro per i campi di tensione e deformazione che si generano nel materiale.

Quindi modificando le relazioni che descrivono il fenomeno:

$$r_y = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2 = \frac{\sigma^2}{2\sigma_{ys}} (a + \Delta a) \quad (3.61)$$

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi(a + \Delta a)} \quad (3.62)$$

$$r_p = \Delta a + r_y \quad (3.63)$$



Irwin stimo' il tutto considerando che la tensione nominale media nella zona plastica su un piano perpendicolare alla direzione di sollecitazione deve eguagliare la tensione di snervamento:

$$\sigma_{ys} \Delta a = \int_0^{r_y} \frac{\sigma \sqrt{\pi(a + \Delta a)}}{\sqrt{2\pi r}} dr - \sigma_y r_y \Rightarrow \sigma_{ys} (\Delta a + r_y) = \int_0^{r_y} \frac{\sigma \sqrt{\pi(a + \Delta a)}}{\sqrt{2\pi r}} dr \quad (3.64)$$

$$\sigma_{ys} (\Delta a + r_y) = \frac{2\sigma \sqrt{\pi(a + \Delta a)}}{\sqrt{2}} \sqrt{r_y} \quad (3.65)$$

ma:

$$\sigma_{ys} \sqrt{r_y} = \sigma \sqrt{(a + \Delta a)} \quad (3.66)$$

$$\sigma_{ys} (\Delta a + r_y) = \frac{2\sigma_{ys} \sqrt{2r_y}}{\sqrt{2}} \sqrt{r_y} \Rightarrow \Delta a = r_y \quad (3.67) \quad \text{e} \quad \Delta a = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2 \quad (3.68)$$

Quindi:

$$r_p = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2 \quad (3.69)$$

Convenzionalmente si considera che la meccanica della frattura lineare elastica viene considerata valida finche':

$$r_p < \frac{a}{50} \quad (3.70)$$

*Forma reale della zona plastica:* La forma della zona plastica dipende fortemente dal criterio di snervamento utilizzato.

Utilizzando von-Mises:

$$\sigma_{ys} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \quad (3.71)$$

Per il modo I in coordinate polari:

$$\sigma_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (3.72)$$

$$\sigma_2 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (3.73)$$

e:

per un caso di sollecitazione piana:  $\sigma_3 = 0$

$$\text{per un caso di deformazione piana: } \sigma_3 = \frac{2\nu K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (3.74)$$

Risolvendo rispetto a  $r_p$ :

$$\text{per un caso di sollecitazione piana: } r_p(\theta) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2 \left[ 1 + \cos\theta + \frac{3}{2} \sin^2\theta \right] \quad (3.75)$$

$$\text{per un caso di deformazione piana: } r_p(\theta) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2 \left[ (1 - 2\nu)^2 (1 + \cos\theta) + \frac{3}{2} \sin^2\theta \right] \quad (3.76)$$

La zona plastica appare come in figura 3.26, molto stretta nella zona centrale:

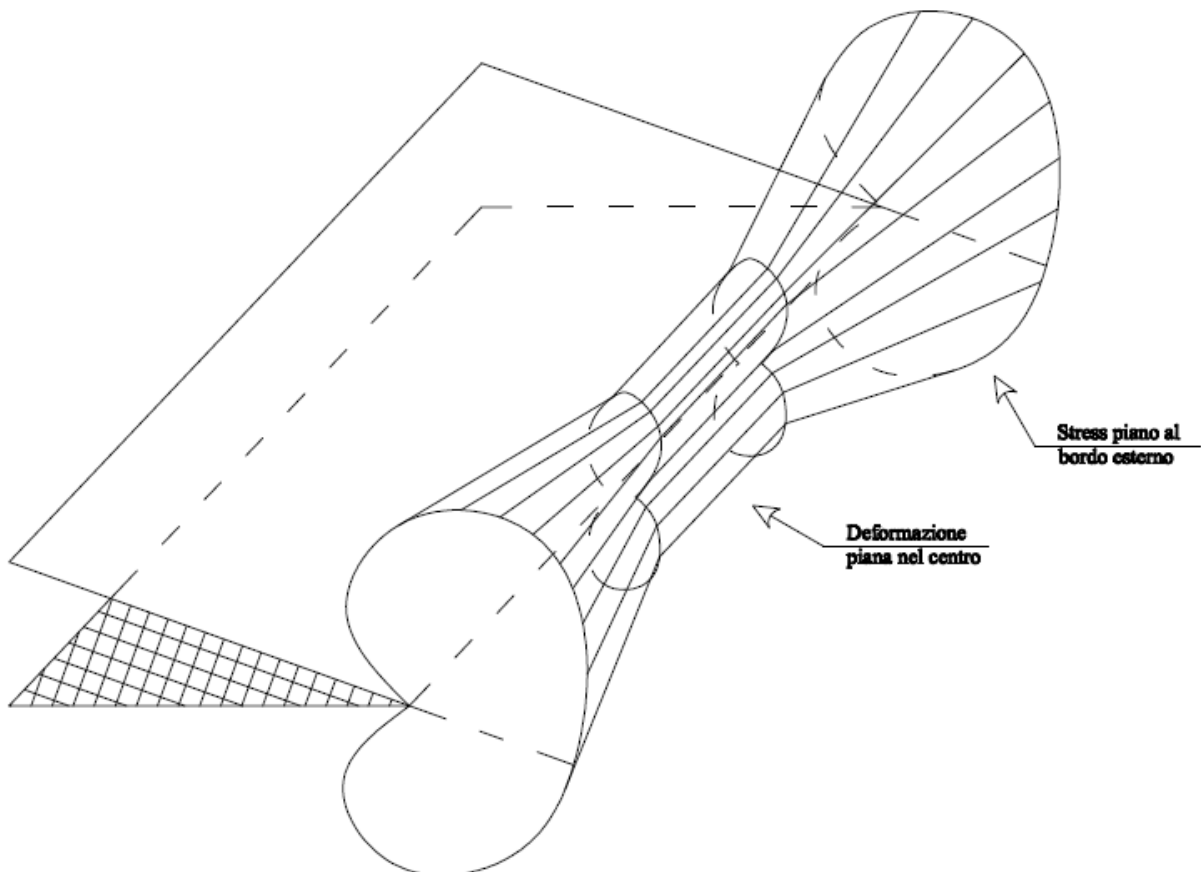


Figura 3.26: visualizzazione tridimensionale della zona plastica generata da una cricca piana.

Se la osserviamo in due dimensioni per i tre differenti Modi:

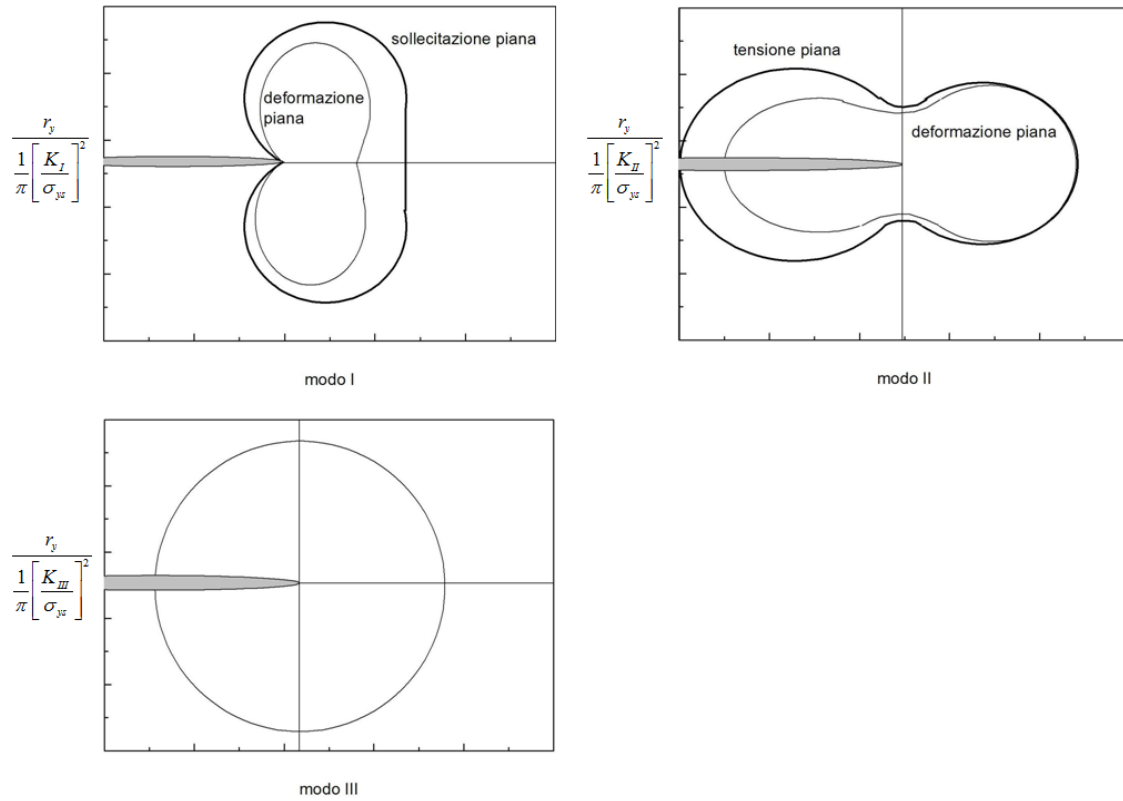


Figura 3.27: sezione trasversale della zona plastica nei modi I, II e III.

Andando a considerare il  $K_{IC}$ , questo e' una funzione dello spessore del provino utilizzato, in particolare man mano che lo spessore si riduce questo aumenta da un comportamento proprio della deformazione piana ad uno proprio della sollecitazione piana:

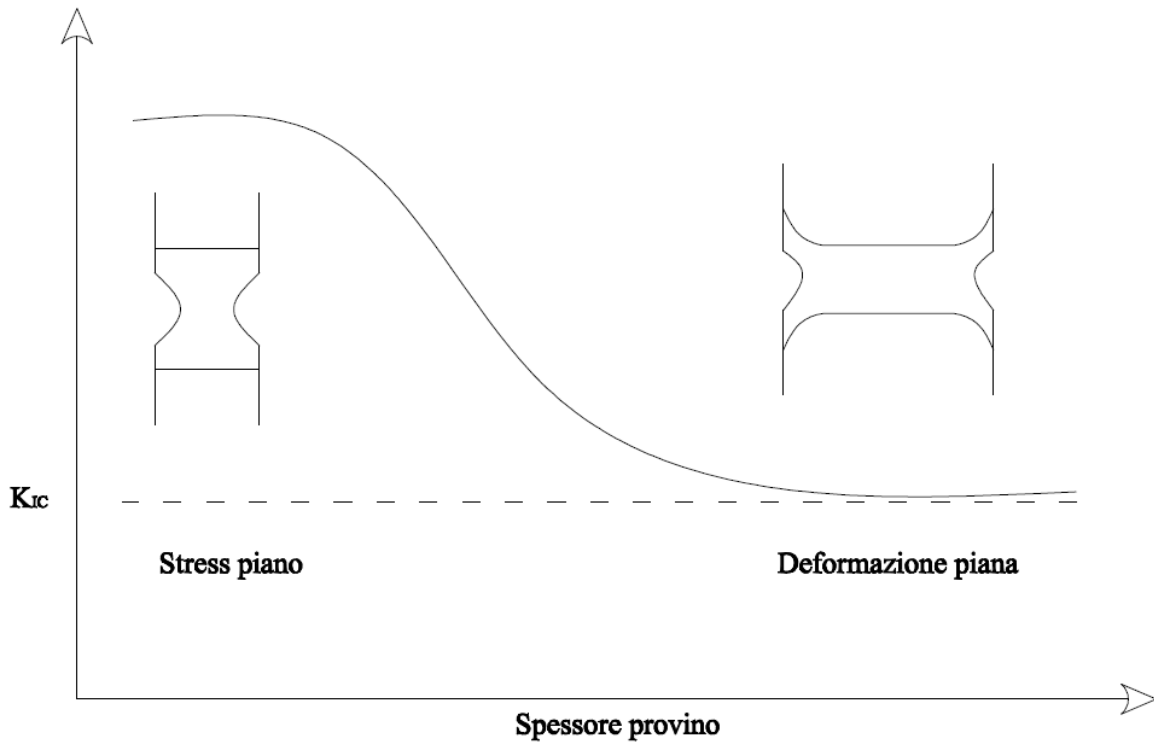


Figura 3.28: variazione del  $K_{IC}$  con lo spessore del provino.

