Matematica

Il moto browniano

Franco Flandoli *Scuola Normale Superiore, Pisa*

Il moto browniano

Probabilmente da considerarsi il Principe dei processi stocastici, esso ha trovato sempre posto in Fisica a partire dai primi anni del 1900, oltre che in altre discipline come la Finanza Matematica, dove forse si può rintracciare per la prima volta in assoluto, nella tesi di dottorato di Bachelier [1]. Tra i contributi forse meno noti nell'ambito della Fisica può essere curioso ricordare la tesina per il raggiungimento del Diploma di Laurea presso la Scuola Normale Superiore da parte di Enrico Fermi, discussa il 20 giugno 1922, poi pubblicato sul Nuovo Cimento [2] (si può trovare una rivisitazione in [3]).

Ricordiamo che uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ è una terna composta da un insieme non vuoto Ω, che potremmo chiamare `universo degli eventi elementari` $\omega \in \Omega$, una famiglia $\mathcal{F}$ di sotto-insiemi di Ω (che sia una σ-algebra, concetto che non definiamo qui) ed una misura di probabilità $\mathbb{P}$ su $\mathcal{F}$. Come insegnato da Kolmogorov [4], questo è un ottimo costrutto su cui basare le nozioni di variabile aleatoria, processo stocastico, probabilità condizionale e indipendenza e tante altre.

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità. Un moto browniano è un processo stocastico, ovvero una funzione misurabile $B : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$, che scriveremo $B_t(\omega)$ o quasi sempre solamente B_t, con le seguenti proprietà:

1. $B_0 = 0$

2. per ogni $t \geq s \geq 0$ l'incremento $B_t - B_s$ è una variabile aleatoria gaussiana di media zero e varianza $t - s$

3. per ogni successione finita $t_n \geq t_{n-1} \geq ... \geq t_0 \geq 0$ gli incrementi $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$, ..., $B_{t_1} - B_{t_0}$ sono indipendenti

4. per ogni $\omega \in \Omega$, la traiettoria $t \mapsto B_t(\omega)$ è una funzione continua, da $[0, \infty)$ in $\mathbb{R}$.

Le proprietà 1 e 4 possono anche essere richieste a meno di un insieme di $\omega \in \Omega$ di probabilità zero. L'andamento di un moto browniano B_t è sicuramente assai erratico, come stabilito dalla proprietà 3: ogni nuovo passetto in avanti è indipendente dai precedenti. Ma ancor di più la proprietà 2 quantifica il grado di erraticità. Infatti, il rapporto incrementale $(B_t - B_s)/(t - s)$, per una nota proprietà delle gaussiane rispetto a moltiplicazione per costanti, è una variabile aleatoria gaussiana di media zero e varianza $1/(t-s)$. Da qui si intuisce che le traiettorie del moto browniano non dovrebbero essere funzioni derivabili, perché per $t - s$ molto piccolo, il rapporto incrementale $(B_t - B_s)/(t - s)$, è enorme e di segno variabile. Con una dimostrazione piuttosto complessa si riesce a vedere addirittura che (a meno di un insieme di $\omega \in \Omega$ di probabilità zero) la traiettoria $t \mapsto B_t(\omega)$ non è differenziabile in alcun punto! Non è facile costruire funzioni continue ma non differenziabili in alcun punto; eppure questa proprietà vale per quasi ogni traiettoria del moto browniano.

Il teorema capito da Fermi [2], pur non formulato esplicitamente per il moto browniano ma solo per una sua approssimazione discreta, la passeggiata aleatoria, si può parafrasare dicendo che, se si calcola il massimo del moto browniano su un intervallo $[0, t]$

$$M_t = \max_{s \in [0,t]} B_s$$

il processo M_t ha le stesse proprietà statistiche del valore assoluto di B_t: per esempio

$$\mathbb{P}(M_t > a) = \mathbb{P}(|B_t| > a)$$

per ogni numero reale a. Fermi utilizzò questa "legge del massimo" in un problema di astrofisica, nella sua tesina per il diploma della Normale [2].

Le equazioni differenziali stocastiche

Anche se, per le applicazioni, è a volte molto utile considerare equazioni differenziali con parametri aleatori, dati iniziali aleatori, forzanti aleatorie aventi traiettorie un po' regolari, il termine `equazione differenziale stocastica` è riservato ad una classe assai particolare, ma dalle proprietà ricchissime rispetto ai casi sopra citati dei parametri aleatori ecc.: equazioni differenziali euristicamente della forma

$$dX_t = b(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,dB_t \qquad (1)$$

dove B_t è un moto browniano. Per evitare inutili complicazioni simboliche, limitiamoci a discutere il caso uni-dimensionale. Anche la soluzione X_t (quando esista) sarà un processo stocastico a traiettorie continue; mentre $b, \sigma : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono funzioni (deterministiche) date. La presenza lineare del moto browniano in queste equazioni è obbligata dalla difficoltà tecnica di definire gli oggetti: la derivata temporale di una traiettoria di B_t non esiste, ed operazioni nonlineari riguardanti dB_t/dt sono troppo complesse. Già il prodotto di dB_t/dt con $\sigma(t, X_t)$ è un'operazione di grande complessità, superata però classicamente dalla teoria dell'integrazione di Itô [5], più recentemente dalla teoria dei *rough-paths* [6]. Visto il carattere non classico dell'operazione di prodotto $\sigma(t, X_t)\,dB_t$ ed anche il fatto che X_t non avrà proprietà di regolarità migliori di B_t (come si intuisce dal fatto che dX_t e dB_t sono proporzionali), quindi anche la derivata dX_t/dt non esiste, si è deciso di adottare la notazione (1), piuttosto insolita in Matematica, così da rammentare la necessità di un'interpretazione speciale. Che è l'interpretazione integrale

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\,dB_s$$

una volta che l'integrale $\int_0^t \sigma(s, X_s)\,dB_s$ sia stato bene definito [5], [6].

Le equazioni stocastiche trovano applicazioni in svariate scienze, prima di tutto in Fisica, ma anche in Finanza, in Biologia ed altre. Le soluzioni X_t sono un po' come dei moti browniani più flessibili, cioè hanno fluttuazioni ed irregolarità simili a B_t, che ne motivano l'uso nei campi in cui queste fluttuazioni ed irregolarità vengono osservate sperimentalmente, ma al tempo stesso possono avere proprietà aggiuntive o diverse. Ad esempio, la soluzione del problema

$$dX_t = -X_t dt + dB_t$$

somiglia ad un moto browniano ma fluttuante in modo stazionario (almeno dopo che il breve transitorio sia passato) attorno a $x = 0$, mentre il moto browniano ha una certa tendenza a divergere come $\pm\sqrt{t}$ quando t cresce. Oppure la soluzione X_t del sistema newtoniano

$$dX_t/dt = V_t$$
$$dV_t = -\frac{1}{\tau}V_t dt + \frac{1}{\tau}dB_t$$

descrive ottimamente una particella `browniana`, cioè immersa in un fluido e così leggera da risentire degli urti molecolari (descritti dal termine $\frac{1}{\tau}dB_t$), con tempo di rilassamento τ (come prescrive il termine $-V_t dt/\tau$). Quando $\tau \to 0$, si può dimostrare che X_t tende al moto browniano teorico (per la precisione, X_t tende a $X_0 + B_t$).

Tra le ragioni di interesse sia applicativo sia teorico per le equazioni differenziali stocastiche, citiamo il loro legame con varie equazioni alle derivate parziali di tipo parabolico ed ellittico, denominate Fokker-Planck e Kolmogorov. Rimandiamo a testi specializzati [7].

Regolarizzazione e selezione tramite rumore

Concludiamo questa introduzione velocissima citando un'interessante direzione di ricerca sulle equazioni differenziali stocastiche. È ben noto il fenomeno di Peano, cioè la mancanza di unicità per equazioni della forma (a titolo di esempio, scegliamo la potenza 1/3 invece che la solita 1/2, in onore della "legge di Richardson" in teoria della turbolenza)

$$\frac{dx(t)}{dt} = |x(t)|^{1/3}, \qquad x(0) = 0.$$

Oltre alla soluzione nulla, che indicheremo con $x_-(t)$, è soluzione anche $x_+(t) = Ct^{3/2}$ ($C = (2/3)^{3/2}$); e lo sono anche le curve $x_{t_0}(t) = C(t-t_0)^{3/2} 1_{\{t \geq t_0\}}$ per ogni $t_0 \geq 0$, che formano il "ciuffo di Peano".

Se ora si prende l'equazione differenziale stocastica

$$dX_t = |X_t|^{1/3} dt + \epsilon dB_t, \qquad X_0 = 0$$

con $\epsilon > 0$, essa ha soluzione unica! Ci sono varie nozioni di unicità per le equazioni stocastiche ma in questo caso valgono tutte, quindi non ci addentriamo nei particolari. Questo è un esempio del fenomeno della regolarizzazione con rumore, valido in vari casi, anche per alcune equazioni alle derivate parziali [8].

Inoltre, quando $\epsilon \to 0$, la soluzione X_t^ϵ del problema precedente tende a $x_+(t)$. Questo ed altri risultati di `selezione`, per equazioni deterministiche prive di unicità, si possono trovare in [9]. Purtroppo la teoria multidimensionale o addirittura infinito dimensionale (equazioni alle derivate parziali) resta poco compresa. Il problema è considerato della massima rilevanza ad esempio in fluidodinamica, a causa dei recenti risultati di non unicità per equazioni di Eulero [10] e Navier-Stokes [11]. Stando al recente risultato [12], la situazione sembra davvero complicata.

[1] L. Bachelier: *Théorie de la spéculation,* Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, 17 (1900) 21.

[2] E. Fermi: *Sopra una formula di calcolo delle probabilità,* Nuovo Cimento, 3 (1926) 313.

[3] F. Flandoli: *Un teorema di calcolo delle probabilità di Enrico Fermi,* Quaderni di Storia della Fisica, 28 (2023) .

[4] A. Kolmogorov: *Fondamenti della teoria della probabilità (Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung),* Springer, Berlin (1933).

[5] D. Revuz, M. Yor: *Continuous martingales and Brownian motion,* Springer, Berlin (2013).

[6] T. J. Lyons: *Differential equations driven by rough signals,* Revista Matemática Iberoamericana, 14 (1998) 215.

[7] D.W. Stroock, S.R.S. Varadhan: *Multidimensional diffusion processes,* Springer, Berlin (1997).

[8] F. Flandoli: *Random Perturbation of PDEs and Fluid Dynamic Models*: École d'été de Probabilités de Saint-Flour XL–2010, Springer, Berlin (2011).

[9] R. Bafico, P. Baldi: *Small random perturbations of Peano phenomena,* Stochastics, 6 (1982) 279.

[10] C. De Lellis, L. Székelyhidi Jr.: *The Euler equations as a differential inclusion,* Ann. of Math., 170 (2009) 1417.

[11] D. Albritton, E. Brué, M. Colombo: *Non-uniqueness of Leray solutions of the forced Navier-Stokes equations,* Ann. of Math., 196 (2022) 415.

[12] M. Colombo, G. Crippa, M. Sorella: *Anomalous dissipation and lack of selection in the Obukhov-Corrsin theory of scalar turbulence*, arXiv:2207.06833.

Franco Flandoli: laureato in Matematica presso l'Università di Pisa ed allievo della Scuola Normale Superiore (SNS), professore di Analisi Matematica e poi di Probabilità e Statistica presso le università di Torino, la SNS di Pisa, l'Università di Pisa ed ora alla SNS. Si occupa di equazioni differenziali stocastiche ed altre dinamiche stocastiche sia per problemi interni alla matematica, sia in applicazioni alla fluidodinamica ed a volte in biomedicina, geofisica, nello studio dei cambiamenti climatici e della transizione energetica.