

Un'escursione nell'universo in alta dimensione

Christian Genest

Department of Mathematics and Statistics, McGill University, Montréal (Québec)

Johanna G. Nešlehová

Department of Mathematics and Statistics, McGill University, Montréal (Québec)

Ben installati nel nostro mondo in 3D, ci è difficile immaginare e descrivere un universo in quattro o più dimensioni. Solleviamo il velo esplorando le proprietà del cubo e della sfera in alta dimensione.

Introduzione

Guardando un foglio di carta a quadretti, vi sarete forse già domandati a cosa potrebbe somigliare la vita per esseri confinati alla sua superficie. Avrebbero coscienza della terza dimensione? Potremmo convincerli della sua esistenza e fargliela immaginare? Domande di questo tipo sono state esplorate da un insegnante inglese dal nome di Edwin A. Abbott (1838–1926) in un'opera di finzione matematica intitolata *Flatland* [1], apparsa nel 1884 e disponibile in italiano sotto il titolo *Flatlandia* [2].

In quest'opera, un quadrato dotato di coscienza descrive la vita in un piano, immagina ciò che potrebbe essere su una retta e come potrebbe fare per convincere i suoi abitanti (che sono dei segmenti di retta) dell'esistenza di una seconda dimensione. Nel romanzo di Abbott, il quadrato riceve la visita di una sfera in 3D che tenta di

fargli comprendere che è più di un cerchio. Una volta che l'ha afferrato, il quadrato si avventura a immaginare, con maggior o minor successo, a cosa potrebbe assomigliare una quarta dimensione. Giudicato come eretico dai suoi simili, finisce in prigione.

Fortunatamente, i matematici ci danno l'agio di esplorare in tutta impunità le proprietà di un mondo con più di tre dimensioni spaziali. Non è, tuttavia, meno difficile rappresentarselo. È quello che tenteremo di fare qui esplorando le proprietà del cubo e della sfera in alta dimensione.

Il cubo e la sua costruzione

Il cubo è un oggetto che ci è familiare. Si pensi, per esempio, a un dado, che si chiamava *kubos* in greco antico. Chiamato anche esaedro, è uno dei cinque solidi regolari di Platone. Ha 6 facce, 12 spigoli e 8 vertici, come si può vedere nella Figura 1. Il cubo di lato c è un poliedro del quale tutti gli spigoli misurano c unità e il cui volume, di conseguenza, è eguale a c^3 .

Nei mondi di dimensione 1 e 2, gli analoghi del cubo di lato c sono rispettivamente il segmento

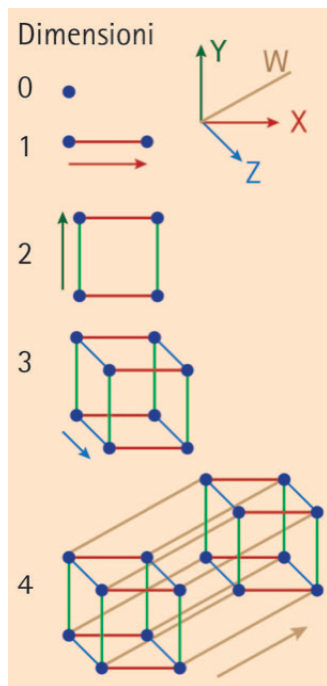


Figura 1: Procedimento di costruzione dell'ipercubo.

di lunghezza c e il quadrato di lato c . Anch'essi sono rappresentati nella Figura 1, che mostra per quale procedimenti si possa passare dall'uno all'altro per costruzione. Per costruire un quadrato a partire da un segmento di retta, per esempio, occorre far scivolare quest'ultimo su una distanza eguale alla sua lunghezza in una direzione perpendicolare alla sua orientazione.

Per un segmento di retta che vive in LineLand, è più facile a dirsi che a farsi perché il suo mondo è unidimensionale. Lui che può solo avanzare o retrocedere, non ha alcuna idea di cosa significhi il termine perpendicolare o l'espressione girare di 90 gradi. Nello stesso modo, come potrebbe un quadrato elevarsi perpendicolarmente dal suolo in un mondo planare, nel quale non vi è né basso né alto?

Il tesseracto e la sua rappresentazione

Si afferra veramente la difficoltà d'immaginare un mondo in dimensione alta solamente tentando di rappresentare il cubo in 4D, chiamato anche **tesseracto**. Perché, se la Figura 1 illustra il procedimento da seguire per costruirlo, essa non consente di visualizzarne il risultato, in mancanza di una 4^a dimensione.

La teoria della relatività (ristretta e generale) di Einstein (1879–1955) ha reso popolare l'idea che il tempo sia la 4^a dimensione. Tuttavia, l'analogia è imperfetta perché è difficile percepire in che cosa il tempo sarebbe ortogonale alle dimensioni spaziali. Inoltre, lo spazio-tempo è curvo e, quindi, radicalmente non-euclideo. E, in ogni modo, questa metafora non è di alcun aiuto per immaginare un mondo in dimensione 5 o più.

Per comprendere la natura del tesseracto o di qualsiasi oggetto in dimensione $d \geq 4$, si è dunque ridotti a contemplarne solo delle proiezioni, vale a dire l'ombra che proiettano nel nostro mondo quando sono illuminati da un sole immaginario posto sulla verticale dietro di essi.

Un quadrato di lato c che è proiettato su una retta parallela a uno dei suoi spigoli si riduce a un segmento di lunghezza c . Si può dunque vederne l'ombra in LineLand. Quando lo si fa girare attorno al suo centro, la sua ombra è ancora un segmento, ma la sua lunghezza oscilla continuamente tra c e $\sqrt{2}c$, raggiungendo il valore massimo ad un angolo di 45 gradi. Immaginate lo stupore di un segmento di retta di lunghezza costante che incontra un essere la cui lunghezza varia a piacere!

Tentare di descrivere le differenti proiezioni nel piano di un cubo che gira intorno al suo centro è un buon esercizio di geometria euclidea. Ma a cosa possono rassomigliare le proiezioni di un cubo in 4D? La questione ha appassionato molti scienziati e artisti, tra i quali il matematico e autore di fantascienza inglese Charles Howard Hinton (1853–1907), al quale si deve il termine tesseract (*tesseract* nell'originale inglese). La storica dell'arte americana Linda Darymple Henderson (1948–) ha dedicato un'intera opera [3] alla quarta dimensione e alla geometria non euclidea nell'arte moderna.

Due rappresentazioni 3D del tesseracto sono date in Figura 2. Quella in alto, chiamata diagramma di Schlegel, è una proiezione ottenuta da un punto dato attraverso una delle sue superficie; questa ha ispirato l'Arco della Difesa a Parigi. L'immagine al centro un dispiegamento 3D del tesseracto che il pittore Salvador Dalí (1904–1989) ha incorporato in un quadro intitolato *Corpus Hypercubus* (1954). Per confronto, il diagramma di Schlegel in 2D di un cubo 3D è presentato nella parte inferiore della Figura 2.

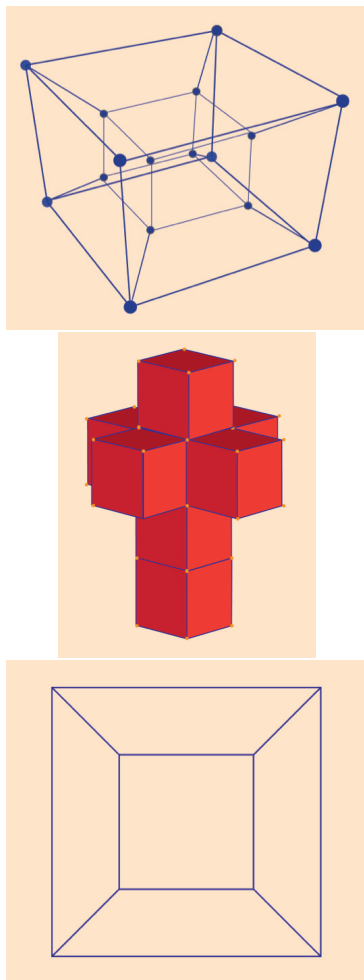


Figura 2: Diagramma di Schlegel 3D d'un tesseratto (in alto), sagoma cruciforme (al centro) e diagramma di Schlegel 2D d'un cubo (in basso).

Grazie al diagramma di Schlegel presentato in alto, nella Figura 2, si può verificare che il tesseratto ha 16 vertici, 32 spigoli, 24 facce piane quadrate e 8 facce tridimensionali cubiche. Queste ultime sono gli elementi costitutivi della sagoma cruciforme della parte centrale della Figura 2. Semplici calcoli permettono di verificare che il volume (in 4D) del tesseratto è c^4 , che la sua superficie esterna (in 3D) è $8c^3$ e che la sua area totale (in 2D) è $24c^2$.

Questi calcoli si estendono all'analogo del cubo in qualsiasi dimensione $d \geq 4$, chiamato **ipercubo**; essi fanno appello alle equazioni scoperte dal geometra tedesco Max Dehn (1878–1952) e estese dal matematico e astronomo scozzese Duncan Sommerville (1879–1934).

Il tedesco Manfred Mohr (1938–) è uno degli artisti che hanno tentato di rappresentare delle proiezioni dell'ipercubo, si veda la Figura 3. Cio-

nonostante, i legami tra l'ipercubo e l'ipersfera sono anch'essi rivelatori.

L'ipersfera inscritta nell'ipercubo

La sfera è un altro degli oggetti famigliari del nostro universo. È la superficie del pallone perfettamente rotondo della nostra infanzia. Matematicamente, è l'insieme dei punti a eguale distanza dal centro. Quanto al solido delimitato da questa superficie lo si chiama spesso **palla**. Le stesse definizioni valgono per qualsiasi dimensione, donde i termini **ipersfera** e **iperpalla**. Per alleggerire la presentazione parleremo semplicemente di **cubi**, **sfere** e **palle**, precisando quando necessario la dimensione.

In dimensione 1, l'analogo della palla di raggio c centrata nell'origine non è altro che il segmento $[-c, c]$ che coincide con il cubo di lato $2c$ con lo stesso centro. Così in Lineland, punto di differenza tra una palla e un segmento di retta! In 2D, la palla è il disco inscritto nel quadrato $[-c, c]^2$. Il termine *inscritto* fa qui riferimento al fatto che il cerchio è tangente ai lati (spigoli) del quadrato; si veda la parte in alto della Figura 4. Questo quadrato con centro nell'origine è anche il più piccolo che possa contenere il cerchio. La stessa costruzione è possibile in qualsiasi dimensione; si veda la parte in basso della Figura 4 per l'analogo in 3D.

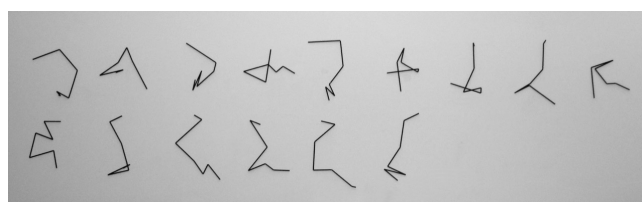


Figura 3: Opera P-499 della serie *Laserglyphs* realizzata nel 1993 da Manfred Mohr, fondata sulle proiezioni ortogonali in 2D del cubo unitario in dimensione $d = 6$, chiamato anche **eserat-to**. Le quindici linee spezzate rappresentano le $d(d-1)/2 = 15$ proiezioni di una delle $2^{d-1}d! = 23,040$ traiettorie possibili lungo gli spigoli che congiungono due vertici diametralmente opposti, vale a dire due vertici congiunti da una delle $2^{d-1} = 32$ diagonali di lunghezza \sqrt{d} [acciaio/pittura, 15 pezzi, 120 × 540 cm, riprodotta con il permesso dell'artista]

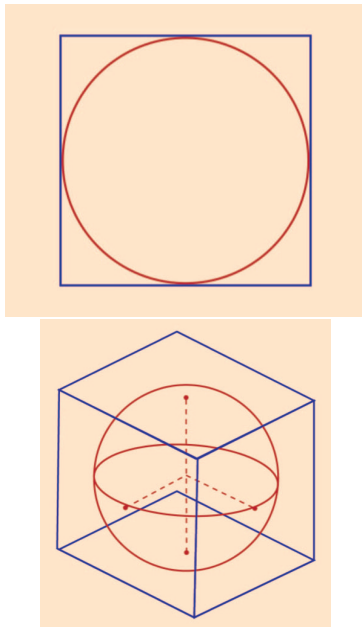


Figura 4: Cerchio inscritto in un quadrato (in alto) e sfera inscritta in un cubo (in basso).

È evidente che il volume della sfera di raggio c in dimensione d è sempre inferiore a quello del cubo di lato $2c$, poiché vi è inscritta. Sorprendentemente, la proporzione del cubo occupata dalla palla decresce a mano a mano che aumenta d . Per esempio, vale 1 in dimensione $d = 1$ (perché la palla e il segmento coincidono), $\pi/4$ in dimensione $d = 2$ e $\pi/6$ in dimensione $d = 3$. Alla fine diventa trascurabile in dimensione molto alta!

In effetti, immaginiamo di scegliere a caso un vettore (X_1, \dots, X_d) nel cubo $[-c, c]^d$. Per farlo si deve prendere un X_1 a caso nell'intervallo $[-c, c]$, poi fare lo stesso con X_2 , e così di seguito fino a X_d . Il vettore apparterrà anche alla palla se $X_1^2 + \dots + X_d^2 \leq c^2$. Osserviamo che ciò può accadere solo se tutti i termini della somma sono minori di $c^2/2$, tranne al più uno. In caso contrario, si avrebbe $X_1^2 + \dots + X_d^2 > 2c^2/2 = c^2$ e dunque il vettore non apparterebbe alla palla.

Ora, tenuto conto del fatto che, per ogni i , $\Pr(a \leq X_i \leq b) = (b - a)/(2c)$, si ha

$$\begin{aligned} & \Pr(X_i^2 > c^2/2) \\ &= 1 - \Pr\left(-c/\sqrt{2} \leq X_i \leq c/\sqrt{2}\right) \\ &= 1 - \left\{c/\sqrt{2} - (-c/\sqrt{2})\right\}/(2c) \\ &= 1 - 1/\sqrt{2} \approx 0.293. \end{aligned}$$

Pertanto, la probabilità che un vettore (X_1, \dots, X_d) appartenga alla palla sono minori di quella d'avere al massimo un fallimento in d prove indipendenti con probabilità di successo $1/\sqrt{2} \approx 0.707$. In termini matematici, si ha

$$\begin{aligned} & \Pr(X_1^2 + \dots + X_d^2 \leq c^2) \\ & \leq (0.707)^d + d(0.293)(0.707)^{d-1} \end{aligned}$$

e il termine a destra è una funzione decrescente di $d \geq 3$ che tende rapidamente a 0. Il suo valore è 0.009 quando $d = 20$ e 3.768×10^{-14} quando $d = 100$.

Tabella 1: Valore del rapporto S , Eq.(2), quando d varia da 1 a 9.

| | | | | | |
|-----|--------|-----|--------|-----|--------|
| d | S | d | S | d | S |
| 1 | 1 | 4 | 0.3084 | 7 | 0.0369 |
| 2 | 0.7854 | 5 | 0.1645 | 8 | 0.0159 |
| 3 | 0.5236 | 6 | 0.0807 | 9 | 0.0064 |

Facendo appello al calcolo integrale, si può infatti mostrare più precisamente che in dimensione d , il volume della palla di raggio c è eguale a

$$\text{Vol}(S_c) = c^d \pi^{d/2} / \Gamma(d/2 + 1), \quad (1)$$

dove $\Gamma(\cdot)$ è la funzione gamma di Eulero che generalizza la nozione di fattoriale. Di conseguenza la proporzione del volume del cubo occupata dalla palla è data dalla formula

$$S \equiv 2^{-d} \pi^{d/2} / \Gamma(d/2 + 1). \quad (2)$$

Il valore di questo rapporto è dato nella tavola 1 per i primi nove naturali. Si constata che tale rapporto diminuisce rapidamente e si verifica senza problemi che tende a 0 quando d tende all'infinito.

Un risultato contro-intuitivo

Un altro modo di vedere le cose, è che all'aumentare della dimensione d , la scatola minima necessaria per imballare una palla di volume 1 diventa sempre più grossa. La ragione è che i 2^d angoli del cubo $[-c, c]^d$ formano spazi vuoti sempre più grandi e numerosi a mano a mano che d aumenta. Pertanto, la scatola è piccola quanto

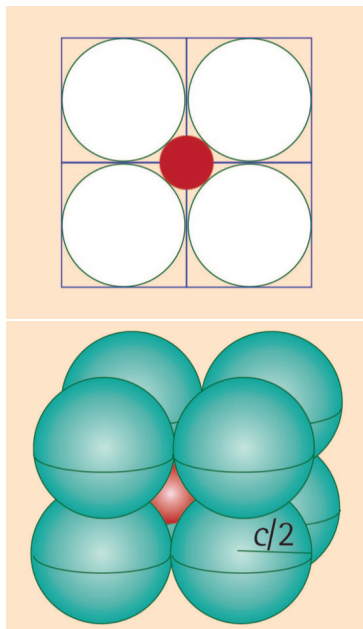


Figura 5: Pacchetti ben imballati. In alto: una palla rossa di raggio $(\sqrt{2}-1)c/2$ tangente a quattro cerchi di raggio c con centro in $(\pm c/2, \pm c/2)$. In basso: costruzione equivalente in 3D.

possibile e, se il suo contenuto è fragile — pensiamo a una palla di cristallo — si trova mal protetto nei punti di tangenza.

Per una spedizione postale in sicurezza in Flatlandia, supponiamo che un quadrato $[-c, c]^2$ sia diviso in quattro parti lungo gli assi e inscriviamo un cerchio di raggio c in ciascuna di esse, come illustrato nella parte in alto della Figura 5. Si può immaginare che questi quattro cerchi rappresentino dei dischi di polistirolo destinati a proteggere il disco centrale, il cui raggio è giusto abbastanza lungo da toccare i quattro cerchi e quindi ad evitare ogni spostamento nel corso della spedizione.

Poiché ognuno dei cerchi bianchi è inscritto in un quadrato di lato c , il suo diametro misura c unità. Inoltre la distanza tra l'origine e un qualsiasi vertice del quadrato è $\sqrt{2}c$ per il teorema di Pitagora. Il raggio della palla rossa è quindi la metà di $\sqrt{2}c - c$, ossia $(\sqrt{2} - 1)c/2$.

È evidente che la stessa costruzione può essere realizzata in qualsiasi dimensione. Quando $d = 3$ si vede nella parte in basso della Figura 5 che ci sono otto palle di polistirolo di raggio c . Quindi, il raggio della palla rossa adesso è $(\sqrt{3} - 1)c/2$ poiché la diagonale maggiore del cubo $[0, c]^3$ è la radice quadrata di $c^2 + c^2 + c^2$ per il teorema

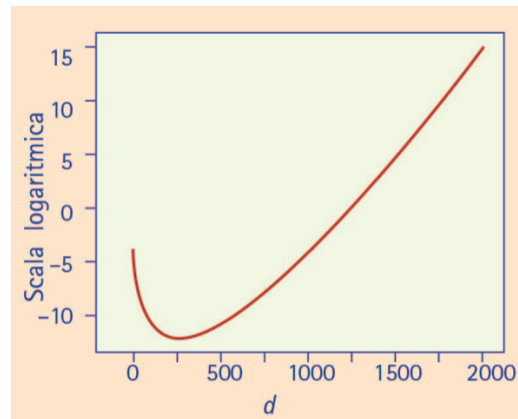


Figura 6: Grafico del logaritmo della frazione data (3) in funzione di d .

di Pitagora. In generale ci sono tante palle di polistirolo quanti spigoli del cubo, 2^d , e il raggio della palla rossa è $(\sqrt{d} - 1)c/2$.

Fin qui tutto bene. Ma emerge un paradosso evidente quando ci si rende conto che in dimensione $d = 9$, la palla rossa diviene tangente all'iper-cubo e che in ogni dimensione $d \geq 10$, una parte del suo volume si trova fuori della scatola. Addio all'imballaggio! Inoltre, il volume della palla rossa diventa definitivamente maggiore di quello del cubo. Buona notte all'intuizione! Infatti, quando $d \rightarrow \infty$,

$$\frac{\{\sqrt{\pi}(\sqrt{d}-1)/4\}^d}{\Gamma(d/2+1)} \rightarrow \infty, \quad (3)$$

come si può verificare per mezzo dell'approssimazione di Stirling. La Figura 6 mostra il comportamento del logaritmo di questa frazione in funzione di d . Il rapporto diventa maggiore di 1 intorno a $d = 1200$ e tende alla fine verso l'infinito.

Non cercate l'errore. Non ve ne sono. Il problema è nella vostra testa, non nella matematica. Per convincervene, guardate piuttosto la Figura 7, che dà due rappresentazioni dell'iper-cubo in dimensione 16. Se la prima è ben conforme alla nostra intuizione, la seconda ha di che sorprendervi.

D'altro canto, si trova che una gran parte del volume della palla in dimensione d si trova lontano dall'origine. In effetti, data una crosta di spessore a alla periferia di una palla di raggio r , come rappresentato in Figura 8, la proporzione del volume occupato dall'anello è data dalla

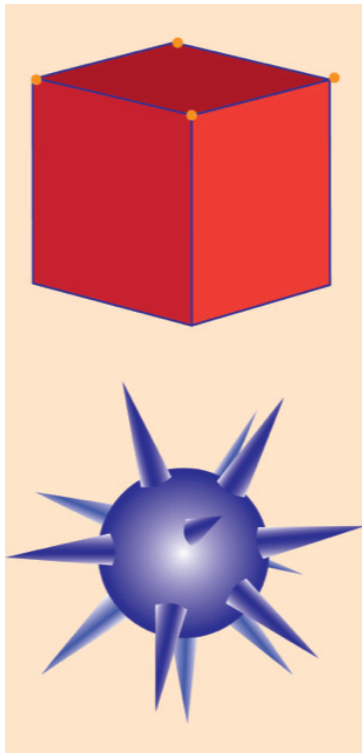


Figura 7: Due rappresentazioni in 3D dell'ipercubo in dimensione 16.

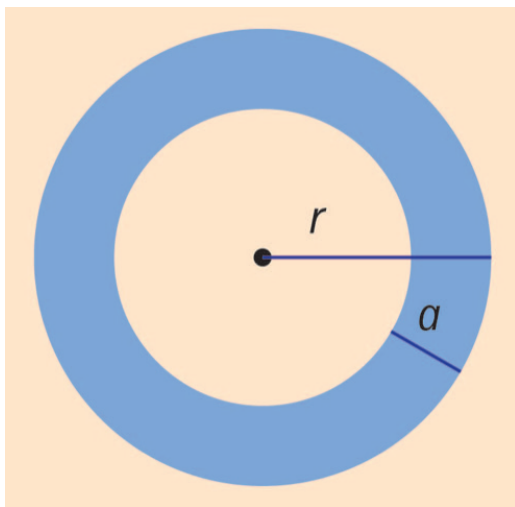


Figura 8: Crosta di spessore a estratta da una palla di raggio r .

formula

$$1 - \text{Vol}(S_{r-a})/\text{Vol}(S_r) = 1 - (r - a)^d/r^d. \quad (4)$$

Ora, quale che sia $a < r$, questa frazione tende a 1 quando d tende all'infinito. È questo fatto, unito alla natura dell'ipercubo rivelata dalla Figura 7, che elimina il paradosso.

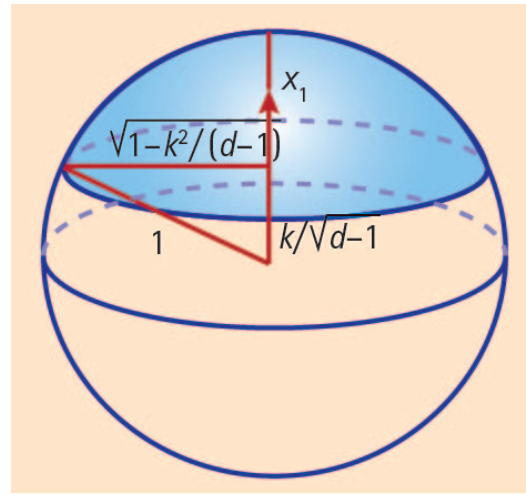


Figura 9: Rappresentazione 3D dell'emisfera H_d e dell'insieme A_d dei punti la cui prima coordinata x_1 è compresa tra $k/\sqrt{d-1}$ e 1.

Un altro risultato sorprendente

Si pensaste d'aver capito tutto, disilludetevi. Ecco un altro risultato paradossale che riguarda questa volta l'accumulazione di massa in una piccola fascia attorno all'equatore della sfera in grande dimensione.

Supponiamo senza perdita di generalità che la sfera sia di raggio 1. Fissiamo un numero $k > 1$ e per ogni dimensione $d \geq k^2 + 1$, consideriamo l'emisfero H_d costituito dall'insieme dei vettori (x_1, \dots, x_d) tali che $x_1 \geq 0$ e l'insieme A_d dei vettori (x_1, \dots, x_d) della sfera tali che $x_1 \geq k/\sqrt{d-1}$; si veda la Figura 9. L'insieme A_d si chiama una calotta sferica. Si deduce dalla formula (1) che

$$\begin{aligned} \text{Vol}(H_d) &= \frac{1}{2} \text{Vol}(S_d) = \text{Vol}(S_{d-1}) \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\{(d+1)/2\}}{2\Gamma(d/2+1)}. \end{aligned}$$

D'altro canto, si può mostrare con l'aiuto del calcolo integrale che

$$\begin{aligned} \text{Vol}(A_d) &= \text{Vol}(S_{d-1}) \int_{k/\sqrt{d-1}}^1 (1 - x_1^2)^{(d-1)/2} dx_1, \end{aligned}$$

di modo che

$$\frac{\text{Vol}(A_d)}{\text{Vol}(H_d)} = \frac{2\Gamma(d/2 + 1)}{\sqrt{\pi} \Gamma\{(d + 1)/2\}} \int_{k/\sqrt{d-1}}^1 (1 - x_1^2)^{(d-1)/2} dx_1.$$

Grazie a questa espressione è possibile verificare che

$$\frac{\text{Vol}(A_d)}{\text{Vol}(H_d)} \leq \frac{2}{k} e^{-k^2/2}. \quad (5)$$

Si noti che questa limitazione è valida quale che sia la dimensione d . Quando $k < 1.096$ (si veda la Figura 10), essa è maggiore di 1 e dunque banale poiché è evidente che il rapporto $\text{Vol}(A_d)/\text{Vol}(H_d)$ è sempre minore di 1. Tuttavia, la limitazione tende esponenzialmente a 0 all'aumentare di k . Inoltre, per ogni valore fissato di k , il rapporto $k/\sqrt{d-1}$ diviene rapidamente trascurabile quando d tende all'infinito.

Ne segue che in dimensione molto grande, quasi tutto il volume della palla unitaria è situato in una fascia di larghezza piccola quanto si vuole attorno all'equatore! Per mostrarlo, si comincia con il darsi un valore di k sufficientemente grande perché la limitazione in (5) sia piccola a piacere. Per esempio, la limitazione vale 7.4×10^{-3} per $k = 3$. Per questa scelta di k , si ha che, per ogni dimensione $d \geq 10$, una proporzione di almeno il 99.26% della massa della semisfera si trova in una fascia delimitata dall'equazione $0 \leq x_1 \leq 3/\sqrt{d-1}$. La larghezza di questa fascia è di 0.3 per $d = 10$ ma solamente di 0.03 per $d = 10,000$, ecc. E ancora, non siamo al termine delle nostre sorprese, perché, per sim-

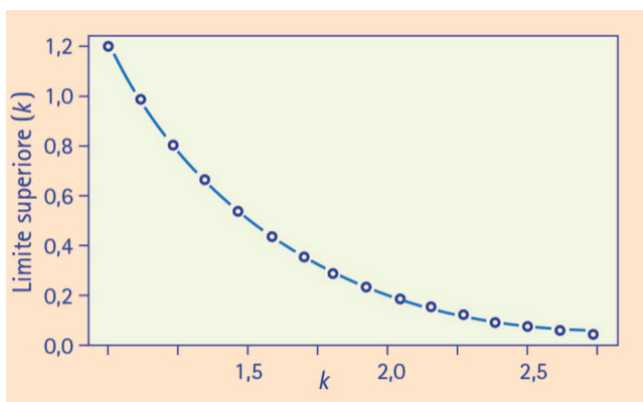


Figura 10: Comportamento della limitazione (5) in funzione di k .

metria, non importa quale diametro della palla unitaria costituisce un equatore! C'è da perdersi, vero?

Interpretazione probabilistica dei risultati

In termini probabilistici, la disuguaglianza (5) permette di concludere che, se si scelgono a caso due vettori della palla unitaria in alta dimensione, la probabilità che il loro prodotto scalare sia minore di $k/\sqrt{d-1}$ in valore assoluto sono arbitrariamente vicine al 100%.

In effetti, una volta scelto il primo vettore (x_1, \dots, x_d) , si può effettuare una rotazione della palla per fare in modo che le componenti del vettore siano tutte nulle con l'eccezione della prima. Poi, dato un numero $\epsilon > 0$ arbitrariamente piccolo, si sceglie $k > 1$ abbastanza grande da avere $4e^{-k^2/2}/k < \epsilon$. Vi è allora una probabilità di almeno $1 - \epsilon$ che la prima componente del y_1 del secondo vettore (y_1, \dots, y_d) verifichi $|y_1| \leq k/\sqrt{d-1}$. In quel caso, il valore assoluto del prodotto scalare dei due vettori sarebbe minore di 10^{-m} dal momento che $d \geq 10^{2m} \times k^2 + 1$ poiché $|x_1 y_1| \leq |y_1|$.

In altre parole, è molto alta la probabilità che due vettori scelti a caso in S_d siano quasi ortogonali quando d è abbastanza grande. Inoltre, tenendo conto del risultato che scende dall'equazione (4), i due vettori hanno anche una grande probabilità di trovarsi in prossimità della superficie di S_d , vale a dire ai confini dell'iperpalla.

Questi risultati, che possono essere estesi a un campione di numerosità arbitraria, trovano diverse applicazioni in statistica [4] dove le componenti di un vettore corrispondono a differenti variabili misurate sullo stesso individuo. Una sfida che gli statistici debbono fronteggiare consiste nel caratterizzare un insieme di punti in alta dimensione trovandogli proiezioni in due o tre dimensioni che siano significative e rappresentative dei legami tra le variabili. In questo senso, il loro lavoro non è troppo differente da quello degli artisti e dei geometri affascinati dall'universo in grande dimensione. E, benché i matematici ci aiutino a vederci più chiaro, siamo, ahimè, qua-

si altrettanto sprovvisti di intuizione dei buoni abitanti di Flatlandia.



- [1] E. A. Abbott: *Flatland: A Romance of Many Dimensions*, Seeley & Co., Londra (1884).
- [2] E. A. Abbott: *Flatlandia*, Adelphi, Milano (1993).
- [3] L. D. Henderson: *The Fourth Dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art*, MIT Press, Cambridge, MA, USA (2013).
- [4] A. Blum, L. Hopcroft, R. Kannan: *Foundations of Data Science*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (2014).



Christian Genest: è professore di statistica e titolare di una cattedra di ricerca sui modelli di dipendenza stocastica all'Università McGill, Montréal, Canada. È stato presidente della Società di statistica del Canada (SSC) nel 2007-08 e redattore capo del *Journal of Multivariate Analysis* dal 2015 al 2019. Ha ricevuto la medaglia d'oro per la ricerca dalla SSC nel 2011 e il premio John L. Synge dalla Società reale del Canada nel 2020.

Johanna G. Nešlehová: è professoressa di statistica all'Università McGill, Montréal, Canada. È membro eletto dell'Istituto internazionale di statistica dal 2011, ha ricevuto il premio CRM - SSC in Statistica nel 2019 e, lo stesso anno, il premio Carrie M. Derick dell'Università McGill per la supervisione e l'insegnamento dei laureati. È anche *fellow* dell'Istituto di statistica matematica dal 2020.