Le città invisibili, guidati da Italo Calvino nell'impero della matematica con la sacca del docente

Sandra Lucente *Dipartimento Interateneo di Fisica, Università degli Studi di Bari "A. Moro"*

Introduzione

Incipit sull'incipit

> "Non è detto che Kublai Kan creda a tutto quel che dice Marco Polo."

Ecco violata una delle regole che ogni *public speaker* conosce: non si inizia con una negazione. Ma è l'*incipit* de `Le Città invisibili`, il libro degli ossimori, pubblicato da Italo Calvino nel 1972. In questo articolo faremo riferimento all'edizione Mondadori del 1993 [1]. Qui le regole possono ribaltarsi e dalla negazione si costruiscono scene che la visione non può affermare. Prendono posto alla destra e alla sinistra del lettore Kublai Kan e Marco Polo. Uno dice, l'altro dubita. Attenzione lettore, guarda bene attorno. "Non è detto che Kublai Kan creda a tutto quel che dice Marco Polo". Chi non dice? L'autore è lì dinanzi a noi e aggancia la nostra curiosità con un dubbio. Il libro è un tavolo da poker dove si sfidano il lettore, lo scrittore, l'imperatore e il viaggiatore.

Qualora il lettore sia un insegnante di matematica troverà in questo *incipit* quella sensazione che troppo spesso gli si palesa a lezione: non è detto che lo Studente creda a tutto quello che dice il Docente. Allora questo `lettore-prof` scruta nella direzione di Calvino e decide di giocare, di scoprire se davvero il viaggiatore mente all'imperatore, o peggio di scoprire se non sta mentendo lo scrittore.

Nelle pagine de `Le Città invisibili`, si instaura un dialogo tra Kublai Kan e Marco Polo, potremmo forse riguardare questa dinamica per stimolare il dialogo tra studente e docente. Il lettore ha puntato, Calvino rilanci.

Non è detto che voi crediate a tutto quello che sto per scrivere, a come gli intermezzi delle `Città invisibili` possano farci riflettere sulla didattica della matematica e sulla matematica stessa, ma io amo questo romanzo e non posso che raccontarlo ogni volta in modo diverso, proprio come ha fatto Calvino con `il Milione` reinterpretandolo dopo quasi settecento anni.

La cornice

Non me ne vogliano gli studiosi di Calvino se in poche righe riassumerò un capolavoro, ma per ricavare dal testo delle osservazioni sull'insegnamento della matematica non ci occorrono troppi dettagli. Non abbiamo tempo, o meglio caratteri, per fermarci nelle città dell'impero di Levante ad ammirare il teatro, né a leggere insegne, o a fare chiacchierare con uomini guidati da stelle. Stiamo cercando una strada e allora stendiamo la mappa dell'universo invisibile e ne riassumiamo la struttura.

Ne `Le Città invisibili` ci sono 55 città di 11 diverse categorie, raggruppate in nove capitoli. Una struttura combinatoria dà origine a questa disposizione generando un indice apparentemente asimmetrico, si veda Appendice A. Altrove ho scritto [2], ma soprattutto parlato, del concetto matematico di dimensione che si legge in tutte le città, si veda Appendice B.

In questo articolo si vuole invece analizzare la cornice narrativa che accoglie le 55 mappe letterarie delle città. Tutte le città hanno il nome di una donna, ma gli unici che ne parlano sono uomini: l'imperatore, gli ambasciatori e oltre questi il giovane veneziano. All'inizio e alla fine di ogni capitolo, Calvino conduce il lettore all'ascolto del dialogo tra Marco Polo e Kublai Kan. Non c'è tempo storico, ma un grande spazio: l'impero di Kublai Kan è troppo ampio, quindi a Marco Polo è chiesto di descriverlo. Noi ci concentreremo su questi dialoghi, immaginando che Kublai Kan sia uno studente, l'impero sia la matematica e Marco Polo sia il docente.

Leggeremo solo la cornice delle `Città invisibili`, ed è ovvio che proveremo incompletezza alla fine della lettura. Eppure se un giorno andassimo agli Uffizi e ci concentrassimo solo sulle cornici dei capolavori sapremmo di aver visto abbastanza da saziare la sete di bellezza, torneremmo in seguito a goderci i dipinti. Leggeremo dunque i brani intercalati tra le città come fossero un racconto disgiunto, deducendone, oserei dire, un corso di comunicazione e formazione.

Un ben più articolato esperimento del genere è stato compiuto nella rilettura matematica delle `Lezioni Americane` di Calvino fatta da Gabriele Lolli [3]. Che Calvino sia attratto dalla matematica è ben noto, basti rileggere la conferenza newyorkese del 1983 quando già preconizza la città dei *big numbers*.

L'edizione Mondadori 1993 ha per introduzione un brano di tale conferenza e una postfazione ad opera di Pier Paolo Pasolini. Per simmetria alle sue inclinazioni, Calvino attrae i matematici e stimola le analogie, il cuore del lavoro matematico, diceva Stefan Banach

> "I buoni matematici riescono a vedere le analogie. I grandi matematici riescono a vedere le analogie tra le analogie".

Ma le analogie, e quindi anche questo articolo, si possono smontare e rimontare:

> "Ogni città si trasfigura. Ma bisogna che tutto capiti per caso, senza dargli troppa importanza, senza la pretesa di star compiendo una operazione decisiva."

Gli elementi narrativi

L'ingresso dell'imperatore

Alla scelta di far vestire allo studente il ruolo di Kublai Kan e al docente quello di Marco Polo si potrebbe obiettare che lo studente non possiede la matematica-impero mentre Kublai Kan aveva conquistato il territorio. Ma oggi nella tasca di ogni studente c'è uno smartphone che raggiunge tutto il sapere in pochi secondi. Eppure Kublai Kan ha bisogno di Marco Polo, esattamente come lo studente ha bisogno di un resoconto che porti in evidenza quello che Calvino chiama "filigrana di un disegno così sottile da sfuggire al morso delle termiti". Il sapere raccontato non muore solo se accolto da curiosità e attenzione in ascolto continuo che stimoli l'immaginazione. È questo l'atteggiamento in cui viene introdotto Kublai Kan.

L'ingresso del giovane veneziano

Marco Polo entra in scena come nuovo arrivato e affatto ignaro alle lingue del Levante. Quando si parla del rapporto di qualcuno con la matematica succede spesso di ascoltare di docenti che non la rendono comprensibile o al contrario di `nuovi arrivati` che riescono a parlare di matematica in modo diverso. Marco Polo viene descritto dai suoi gesti, dai salti, dalle grida di meraviglia e di orrore, la pantomima dell'ambasciatore amato sembra funzionare molto meglio sull'imperatore rispetto al dettagliato calcolo portato dagli altri suoi colleghi ambasciatori. Può un docente avvicinare alla matematica solo con formule per quanto esatte? È invece necessario prima descrivere il senso di quelle formule con una pantomima di immagini che suscitino meraviglia e a volte persino orrore.

La sacca del docente e la partita a scacchi

La figura di Marco Polo è accompagnata dalle bisacce con oggetti da disporre come pezzi degli scacchi. Se immaginassimo uno studente parlare di noi, quali oggetti userebbe per connotarci? Abbiamo nella memoria docenti anni settanta con la sigaretta oppure catastrofici professori che perdono libri mentre camminano. La tecnologia ha fatto molto più ordine tra le carte, riversando il caos nelle cartelle di *file*. Oggi forse il *computer* è la bisaccia di molti docenti. Ma non esiste un docente che non abbia una borsa.

Marco Polo descrive le città estraendo oggetti dalla bisaccia disposti poi come pezzi degli scacchi. Calvino, in un romanzo combinatorio, non ci dice quale sia la migliore disposizione sulla scacchiera, è il segreto dell'ambasciatore. Quando un docente decide di ricorrere ai segni, di estrarre un oggetto da una borsa per spiegare un concetto, oppure di usare una *app* per provocare gli studenti con l'interazione di un concetto dinamico, allora deve anche decidere in quale modo porgerlo, a quale livello. La scacchiera di inizio gioco o la configurazione a due passi dallo scacco matto?

Facciamo un esempio che mi è particolarmente caro: il concetto di limite finito di una successione. Possiamo ovviamente scegliere dalla borsa solo il gesso o la penna del *tablet*, per scrivere la nozione epsilon-nu, avendo egregiamente svolto il nostro compito e consegnando allo studente una formula che non contiene alcuna ambiguità. Docenti con una borsa leggermente più ingombrante preferiscono invece partire dal racconto della divisione del cerchio, dell'esaustione archimedea e mostrare sulla LIM programmi dinamici in cui poligoni regolari inscritti riempiono il cerchio dall'interno o dall'esterno. Solo dopo arriva la formula epsilon-nu. Questo secondo docente non ha mostrato pigreco già sotto-scacco, ma ha mostrato agli studenti tutta la partita.

Cè una possibilità ancora più efficace: far giocare la partita agli studenti stessi. Se allo studente si chiede di costruire il poligono regolare nel cerchio, di tagliarlo, dopo vari tentativi con numero di lati crescente sarà lo studente stesso ad osservare che la parte restante tende a zero. Solo dopo viene la visione di questo processo fatto con un numero di lati molto grande mediante un software di geometria dinamica e infine la formula. In pratica abbiamo disposto il nostro sapere come sulla scacchiera ad inizio partita. Per inciso, riguardo pigreco, uno degli esperimenti più famosi è lago di Buffon e questo scienziato francese, in quanto naturalista, viene citato da Calvino descrivendo la biblioteca della città di Teodora.

Tornando all'insegnamento della matematica, qualunque approccio si voglia seguire deve essere sottinteso che la matematica è una partita più grande di quella singola spiegazione. L'acquisizione di ogni concetto matematico dà una idea di matematica, anche se mai avremo tutti i concetti della regina delle scienze. In parallelo, dice Kublai Kan:

> "Se ogni città è come una partita a scacchi, il giorno che arriverò a conoscerne le regole possederò finalmente il mio impero, anche se mai riuscirò a conoscer tutte le città che contiene."

Gli emblemi

> "Palese o oscuro che fosse, tutto quel che Marco mostrava aveva il potere degli emblemi che una volta visti non si possono dimenticare nè confondere."

Anche nella singola frase, Calvino non rinuncia alla simmetria: "palese o oscuro" si legano a "nè dimenticare nè confondere". L'emblema va indagato partendo da diverse direzioni. L'etimologia di emblema è gettare dentro.

Il docente che scelga di usare emblemi, cioè oggetti che introducano un concetto, non guardi tanto il suo gesto mentre porge un solido o una immagine o una stessa parola, ma si concentri sulla possibilità che lo studente lo tocchi, lo legga, lo guardi da varie prospettive. Gli emblemi che il docente utilizza per introdurre i concetti non sono i concetti stessi, per questo portano una parte di incertezza che la matematica andrà a chiarire. Non sempre le connessioni tra un elemento e l'altro del racconto risultavano evidenti all'limperatore: gli oggetti potevano voler dire cose diverse. Quando ad un bambino si consegna un emblema matematico (i regoli o il geopiano ad esempio) potrebbe usarlo con uno scopo completamente diverso da quello per cui abbiamo creato quell'oggetto. Eppure questa è una ricchezza. Gli emblemi sono l'esca del concetto.

Un esempio molto interessante è l'utilizzo di un domino per spiegare il principio di induzione. Un docente che voglia, come Marco Polo, usare gli emblemi dovrebbe disporre le tessere in verticale a distanza opportuna e farle poi cadere in successione, discutere con gli studenti di infinite tessere e di come il gioco si interromperebbe se una tessera fosse troppo lontana dall'altra. Solo dopo mostrerà esempi di dimostrazione per induzione e ancora dopo il metodo induttivo nella forma di assioma dei numeri naturali. Questo ultimo *step* è ovviamente consigliato soprattutto a livello universitario.

Forse un giorno lo studente dimenticherà cosa sia la base dell'induzione, non saprà quale è la somma dei quadrati degli interi, ma di certo ricorderà quelle tessere e l'esistenza di un metodo dimostrativo che riguarda solo le proprietà basate sui numeri naturali. Tornando al discorso didattico generale, il docente che passi dagli emblemi alle formule ponga molta attenzione a come sceglierli, in modo che il suo significante regga allo sviluppo del concetto. Come per Kublai Kan, ogni nuova notizia aggiunge all'emblema un nuovo senso. Si pensi alla spiegazione della parabola in ambito geometrico per poi ripescarla nell'ausilio grafico alle equazioni di secondo grado. Dunque l'emblema deve essere capace di accrescere il suo significato con lo sviluppo delle conoscenze riguardo il concetto.

Tornando al caso del principio di induzione ad esempio, una volta introdotta la nozione di insieme continuo lo studente si chiederà come mai il domino non funziona più e potrebbe addivenire all'idea che il continuo sia un blocco di marmo in cui le tessere sono così vicine che non cè alcuno spazio per far cascare nemmeno una molecola.

Il linguaggio

Col passare del tempo, ai gesti si sostituiscono le parole

> "dapprima esclamazioni, nomi isolati, verbi, poi giri di frase, discorsi ramificati e frondosi, metafore e traslati."

Sin dal principio chi insegna vorrà giungere a questo momento di dialogo meno imbarazzato, ma se prendiamo a modello l'ambasciatore Marco Polo allora dobbiamo notare che le prime parole a sostituire le esclamazioni sono i nomi isolati. Le parole delle matematica vanno consegnate sempre con cautela, inserendole nel linguaggio naturale. Se vogliamo spiegare la corrispondenza tra insiemi, si potrebbe sottolineare che nelle pieghe della definizione di Dirichlet c'è l'idea di missive che gli abitanti del primo insieme mandano agli abitanti del secondo. La polisemia è una ricchezza del linguaggio matematico, non un limite. Eredita quella ambivalenza degli emblemi che generava spazio di libertà.

Marco Polo suggerisce anche di usare le metafore, queste sono in qualche modo sono gli emblemi della comunicazione. Tutto questo articolo è una metafora, quindi non mi soffermerò troppo su questo aspetto, ma sul loro uso in matematica. Vedere gli insiemi come `sécchi` invece che come `cerchi` è più o meno efficace per comprendere il concetto cardine della matematica moderna? L'idea dei `sécchi` va scartata perché non si presta poi alla spiegazione delle operazioni tra insiemi, non è chiaro cosa sia l'unione o l'intersezione.

Dunque la scelta della metafora richiede sempre attenzione. Infine, non è bene mischiare metafore diverse, bisogna estrarle una per volta dalla sacca del docente e consegnarle in modo che coloro con cui dialoghiamo possano analizzarle da diverse prospettive. Esattamente quello che succedeva agli emblemi. Quando poi il concetto si formalizza nella spiegazione si devono riprendere i gesti, gli emblemi, le immagini e la metafore per mostrare la non ambiguità della formalizzazione. Alle notizie fondamentali enunciate con vocaboli precisi, egli faceva seguire un commento muto.

Il dialogo

Non troppi docenti sono disposti a credere che Marco Polo e Kublai Kan giungono ad un discorso ramificato e frondoso tanto che

> "lo straniero aveva imparato a parlare
> la lingua dell'imperatore o l'imperatore
> a capire la lingua dello straniero."

Verso questo traguardo sono stati fondamentali le pause dei dialoghi, lo spazio intorno alle informazioni un

> "vuoto non riempito di parole che ci si
> poteva girare in mezzo con il pensiero,
> perdercisi, fermarsi a prendere il fresco
> o scappare via di corsa."

In epoca di *blog* e video e *slide*, occorre, come nella lezione frontale, avere la dote di descrivere i concetti lasciando dello spazio per girarci intorno, per perdersi, per fermarsi. Se chi ci ascolta troverà questa possibilità allora visiterà la città, altrimenti una didattica auto-consistente crea una città trafficata di nozioni, chiusa e soffocante.

Fermarsi manifestando insofferenza o scappare sono atteggiamenti tanto diversi che l'imperatore manifesta a paragrafi alterni. La pazienza di Marco Polo sta nell'accoglierli, non sopprimendo quel vuoto; la grandezza dell'imperatore sta nel volerlo abitare. Avere docenti che riempiono di nozioni o scegliere di essere studenti che rifiutano il tempo del perdersi tra queste rende la matematica una materia impenetrabile.

C'è una una scena in cui i due protagonisti calviniani tacciono:

> "tra loro era indifferente che quesiti e
> soluzioni fossero enunciati ad alta vo-
> ce o che ognuno dei due continuasse a
> rimuginarli in silenzio."

Siamo capaci, come insegnanti di questa zona di libertà su quesiti e soluzioni? Siamo capaci di una pazienza alla Marco Polo? Il viaggiare gli ha dato un tempo diverso per ogni città, adesso dà all'imperatore il suo tempo di relazione. Ogni docente ricordi il tempo in cui ha viaggiato nelle città matematiche e ne generi il tempo di relazione con i suoi allievi fiducioso che un dialogo di questo tipo ha una meta, un approdo. Il sogno di ogni docente è ascoltare la frase dello studente che si avvia a congetture.

Nella metafora calviniana è il momento in cui l'imperatore annuncia al giovane veneziano:

> "d'ora in poi sarò io a descrivere le città
> e tu verificherai se esistono e se sono
> come io le ho pensate."

C'è un passaggio intermedio che può essere obbiettivo di ogni docente e studente: la lezione (la città nel caso di Marco Polo) deve poter essere viene smontata e ricostruita in altro modo, sostituendo ingredienti, spostandoli, invertendoli (come fa Kublai Kan). Ad esempio cambiando gli assiomi, si possono far immaginare le geometrie non euclidee già mentre si studiano gli Elementi.

I pezzi degli scacchi e la scacchiera

Verso fine libro Calvino mette in discussione gli emblemi suggerendo di usare pochi oggetti (i pezzi degli scacchi) per rappresentare svariati elementi. È un passaggio di astrazione che va fatto appunto dopo molto cammino, inserire l'astrazione prima di alcune curiose visioni ci priverebbe dell'attenzione dell'ascoltatore. Quando il viaggio nella matematica è maturo, il confronto docente/studente è quello tra giocatori di scacchi, e la partita è la scoperta di come le regole algebriche e geometriche conducano a stati successivi di conoscenza: innumerevoli forme che il sistema delle forme mette insieme e distrugge. Questo verbo distruggere non vale per i teoremi, ma sicuramente alcune partite sono state archiviate, hanno perso interesse.

A coloro che si occupano di programmi scolastici o dell'impostazione di corsi universitari è richiesta massima attenzione alla scelta degli argomenti da proporre agli studenti. La disposizione sulla scacchiera determina infatti la vittoria o la sconfitta della curiosità. Ma nessuno dimentichi di descrivere i meccanismi della matematica stessa, della scacchiera insomma. E lì che ci sono le storie più affascinanti. Marco Polo fa proprio questo quando Kublai Kan mette in dubbio il senso del gioco: parla della consistenza della scacchiera.

Il giardino

Tutto il dialogo tra Kublai Kan e Marco Polo si svolge nel giardino dell'imperatore, in una atmosfera di bellezza orientale. All'inizio del capitolo VII però i protagonisti mettono in dubbio l'esistenza dei viaggi e dello stesso giardino. Resta solo certa l'esistenza del dialogo. Ma il giovane veneziano rassicura l'imperatore di un secondo giardino:

> "ogni cosa che vedo e faccio prende senso in uno spazio della mente dove regna la stessa calma di qui, la stessa penombra, lo stesso silenzio percorso da fruscii di foglie."

Se dovessimo interpretare un luogo per lo studio della matematica non potremmo scegliere che un simile giardino. L'apprendimento della matematica diventa un viaggio solo se si parte da una mente concentrata, attenta ai fruscii del ragionamento, al muoversi delle ombre.

Rinunciare ad un approccio performante e competitivo è fondamentale per il piacere dello studio di questa disciplina. Quando Marco Polo aggiunge che il giardino dell'imperatore affaccia le sue terrazze sul lago delle loro menti sembra suggerire anche uno stile della lezione che ricordi agli studenti le potenzialità di uno studio concentrato, che non è un dono scontato che si attiva con un interruttore. La concentrazione è un esercizio continuo legato anche al credere in sè stessi e alla rinuncia di distrazioni/aiuti di dispositivi elettronici. La concentrazione è anche necessaria per far germogliare nel giardino della mente nuove bellezze. Un processo insomma che chiudendo il cerchio fa ripartire nuovi viaggi nell'impero della conoscenza.

L'impero

L'impero di Kublai Kan è amplissimo e descritto da ambasciatori anch'essi stranieri. Lo stesso conquistatore resta sempre straniero ai suoi sudditi. Seguendo metafora dell'impero matematico, dell'imperatore/ studente e degli ambasciatori/docenti giungiamo a dover affermare che chi insegna la matematica non la possiede mai definitivamente.

> "Solo attraverso occhi e orecchi stranieri l'impero può manifestare la sua esistenza,"

così solo attraverso un passaggio millenario di testi e lezioni la matematica dispiega la sua lista di tesori. E per quanto il docente o il ricercatore singolo possa trasmettere metodi algebrici, idee geometriche, tecniche dimostrative, ogni giorno si palesa il rischio

> "dell'opaco spessore sonoro"

che riduce le idee a cifre e tecnicismi. Invece la matematica da far scoprire è insieme quella necessaria per il prosieguo degli studi, quella in uso nelle applicazioni e perché no, quella possibile non ancora mai scritta, ma che si intravede nelle congetture che somigliano alle sfere di vetro nella città di Fedora.

Un'altra visione è descritta nella città di Zoe: si apprende che esiste una città senza figure e senza forma riempita di città particolari. Se l'impero per Kublai Kan ha perso la misura, per molti la matematica è l'impero della scienza, ma nel suo proliferare di teoremi e sottodiscipline e modelli ha perso quella forma così chiara che aveva quando era geometria euclidea prima e hilbertiana dopo.

Quando onestamente il docente rivela la sua pochezza rispetto ad una disciplina così vasta, lo studente potrebbe scoraggiarsi. Bisogna dunque tenersi pronti a dibattere su questo spiegando la potenza e il fascino del linguaggio matematico, pronto per descrivere anche le nostre città visibili e le loro dinamiche. Ma Calvino mette in guardia:

> "non c'è linguaggio senza inganno."

Per questo tra i dialoghi si inserisce un paradosso (non si può tornare a raccontare la città da cui non si torna) e una dimostrazione per assurdo (sulla propria esistenza). Nulla avvicina lo studente alla logica che soggiace alla matematica più del gioco di ricerca dei paradossi. La domanda "a cosa serve questo gioco?" è però sempre pronta ad esplodere. Ci ricorda una esclamazione di Kublai Kan che sembra risentito con Marco

Polo e confrontandolo con gli altri ambasciatori esclama:

> "Torni da paesi altrettanto lontani e tutto quello che sai dirmi sono i pensieri che vengono a chi prende il fresco la sera seduto sulla soglia di casa. A che ti serve tanto viaggiare?"

La matematica è fatta di discipline, connesse tra loro. È bene che sin da subito si insegni questa pluralità. Ogni disciplina è nata in risposta a domande di fisica o di filosofia o di economia o di matematica stessa. Ci sono persino parti della matematica nate da domande belliche. Come Calvino asserisce che

> "ogni città riceve la sua forma dal deserto a cui si oppone,"

così i matematici non hanno la sensazione di colmare un vuoto, quanto di costruire e insieme scoprire le proprie città mentre rispondono. Non si costruisce l'applicazione della matematica, si risponde alle domande costruendo la matematica.

Un impero fatto di archi

Uno dei passaggi più celebri delle Città invisibili è il seguente:

> "Marco Polo descrive un ponte, pietra per pietra - Ma qual è la pietra che sostiene il ponte? - chiede Kublai Kan - il ponte non è sostenuto da questa o quella pietra, - risponde Marco, - ma dalla linea dell'arco che esse formano. Kublai Kan rimane silenzioso, riflettendo. Poi soggiunge: - Perché mi parli delle pietre? È solo dell'arco che mi importa. Polo risponde: - Senza pietre non c'è arco. "

Il docente deve prendere il tempo di descrivere pietra per pietra l'arco di un concetto. Deve avere il coraggio di non andare immediatamente a quello che interessa allo studente, la matematica non è una disciplina in cui la comprensione si realizza nello stesso tempo della spiegazione. Il programma del corso o dell'anno deve essere un dispiegarsi di città che costituiscono un romanzo.

> "Più si perdeva in quartieri sconosciuti di città lontane, più capiva le altre città che aveva attraversato per giungere fin là."

La geometria analitica non deve tradurre la geometria euclidea con i metodi algebrici, deve farci capire meglio l'una e l'altra disciplina. La bellezza del teorema di Pitagora potrebbe rivelarsi dopo aver studiato il teorema di Carnot o addirittura gli spazi hilbertiani. Se la matematica non ha tempo, il suo apprendimento sì. Lo studioso deve percepire che esiste un passato che cambia man mano egli avanza nel suo viaggio.

L'atlante

> "Il Gran Kan possiede un atlante, ne sfoglia le carte sotto gli occhi di Marco Polo per mettere alla prova il suo sapere."

Il docente attuale sa bene che lo studente può cercare ogni contenuto sul *web* e il suo sapere può esser messo alla prova, allora si ricordi che lui è il viaggiatore, può riconoscere nella vastità della rete quello che ha già visto, accennare itinerari in zone sconosciute. Ci deve però accompagnare il dubbio che la rete possa sottrarci il possesso del sapere:

> "Mi sembra che tu riconosci meglio le città sull'atlante che a visitarle di persona."

Il ruolo del docente non è elencare le città ma stimolare ad andare altrove.

Deve essere un atlante gigantesco quello di Kublai Kan, ricorda uno di quei quadri realizzati a puntinismo. In ogni punto si è contratta una città, proprio come accade ad Olinda. E tutte le città non sono che un punto sino ad una somiglianza assoluta suggerita da Calvino quando racconta Trude, la città proprio antecedente Olinda.

Capitava a scuola che ci venisse assegnato un disegno da colorare con il puntinismo. La visione finale era potente ma nessuno di quei punti aveva importanza in sé, eppure si potevano aggiungere ma non sottrarre punti. A ripensarci la rete e il sapere funzionano in modo analogo. Invece dei punti c'è una stringa di caratteri, l'indirizzo *web*, il disegno finale è potentissimo, ma si rischia la perdita di importanza del singolo argomento. Lì esattamente lì, nella scelta del colore, nel racconto di quel punto è l'inalienabile ruolo dell'insegnante. Il segreto di Marco Polo non è aver visto le città, ma conoscere l'ascoltatore e stimolarne le attese:

> "chi mi ascolta ritiene solo le parole che aspetta. Chi comanda al racconto non è la voce è l'orecchio."

Conclusione

La rappresentazione

In molte stampe e dipinti l'incontro tra Kublai Kan e Marco Polo è rappresentato come lo scambio di un libro. Chi guarda può immaginare che l'imperatore stia porgendo al veneziano un atlante del regno o, ricevendo Il Milione, o, in un universo futuro, insieme leggono `Le Città Invisibili`.

Nella postfazione Pasolini sottolinea che i "due interlocutori siano eternamente cangianti". Nel caso di docente/studente questo ci porta ad immaginare che nel porgersi il libro, nello scambiarsi lo sguardo, i nostri interlocutori si riconoscano e insieme si sorprendano del loro cambiamento nel tempo. Sarebbe auspicabile che in uno di questi passaggi di testi i due protagonisti dell'apprendimento si interroghino sull'assiomatica che produce un ramo o l'altro della matematica.

Per Marco Polo l'impero si genera da "una città fatta solo da eccezioni", per Kublai Kan "un modello che racchiude tutto quello che risponde alla norma". Lo studente impara il rigore e in un incontro di là nel tempo, il docente deve metterlo in discussione deve far capire che certe costruzioni teoriche sono nate da controesempi.

Le funzioni mostruose del primo novecento e la teoria dei frattali sono un esempio in questo senso. Quante volte i matematici si sono sentiti dire che le proprie visioni non esistevano. Sono sopravvissuti, come consiglia Marco Polo,

> "credendo che se vuoi sapere quanto buio hai intorno devi aguzzare lo sguardo sulle fioche luci lontane."

La storia della matematica deve affiancarsi alle lezioni teoriche e alle esercitazioni perché quella storia mostra come procedere per viaggiare nel vasto impero dei numeri e delle forme. Lo studente appassionato di matematica considererà anche l'approccio storico utile al dominare la materia. Torna a risuonare la domanda di Kublai Kan:

> "riuscirò a possedere il mio impero finalmente?"

C'è una ingenua visione lineare del sapere, che non bisogna in alcun modo trasmettere. Il sapere, soprattutto odierno, è centrato sulla complessità e sulla parzialità di visioni. Lo studente appassionato di matematica deve avere in risposta a questa domanda l'idea di un impegno costante e di un lavoro corale che è quello che oggi si fa nei centri di ricerca. Sulla rete, grazie allo scambio di informazioni, il sapere diventa transdisciplinare e completa quel che sappiamo per portarci nuove domande su aspetti che non conosciamo.

> "Il viaggiatore riconosce il poco che è suo scoprendo il molto che non ha avuto e che non avrà."

Conclusione sulla conclusione

L'introduzione di Calvino e la postfazione di Pasolini sembrano dialogare tra loro iterando il *pattern* del dialogo tra Kublai Kan e Marco Polo. Si legge nelle prime pagine:

> "le città invisibili sono un sogno che nasce dal cuore delle città invivibili."

Si legge negli ultimi fogli:

> "tutte le città che Calvino sogna nascono dallo scontro tra una città ideale e una città reale."

Anche questo articolo si è generato da lezioni e laboratori nella città del sapere che idealmente ha ancora il nome di scuola e università. A volte invisibile, a volte invivibile, a volte idealizzata, a volte realizzata. Parafrasando la frase di Calvino, la lezione di matematica ideale nasce nel cuore di un'epoca che sembra senza fantasia. E nasce persino dalla nostalgia. Pasolini, nella stessa postfazione, scrive infatti che

> "i desideri, le nozioni, le informazioni, le notizie, le esperienze, le ideologie, le logiche, tutto è ricordo. Ogni strumento intellettuale per vivere è un ricordo."

Dunque anche la lezione di matematica deve mettere nostalgia della soluzione di un problema, dell'intuizione passata, dello studio futuro.

Parlando, o tacendo, del termine dei viaggi, chiede Kublai Kan:

> "È per smaltire la nostalgia che sei andato tanto lontano?"

Non risponde Marco Polo:

> "La forma delle cose si distingue meglio in lontananza."

Oggi si sente soprattutto nostalgia della profondità richiesta da ogni concetto. Una profondità individuale dinanzi alla complessità della matematica che il nostro tempo richiede. In definitiva il docente deve con il suo racconto mirare a suscitare la stessa decisione che nell'immaginario prese lo studente Kublai Kan:

> "è tempo che il mio impero, già cresciuto troppo verso il fuori, cominci a crescere al di dentro"

e insieme crescere in leggerezza perché la matematica deve sempre essere fonte di piacere del pensiero e del dialogo.

Quello di Marco Polo e Kublai Kan si conclude con una notissima frase che non contiene la parola città o la parola viaggio ma le parole `attenzione`, `sapere`, `apprendimento`. Per non soffrire dell'inferno dei viventi, sostiene il giovane veneziano, esiste un modo che

> "esige attenzione e apprendimento continuo: cercare e saper riconoscere chi e cosa non è inferno e farlo durare e dargli spazio."

Appendice A: Struttura combinatoria de Le città invisibili

Italo Calvino, figlio di una docente di botanica e un agronomo, sente la necessità di sistematizzare, di sperimentare la classificazione delle città.

Le 55 città sono raggruppate in 11 gruppi da 5:

(Me) LE CITTÀ E LA MEMORIA:
Diomira, Isidora, Zaira, Zora, Murilia
(De) LE CITTÀ E IL DESIDERIO:
Dorotea, Anastasia, Despina, Fedora, Zobeide
(Se) LE CITTÀ E I SEGNI:
Tamara, Zirma, Zoe, Ipazia, Olivia
(So) LE CITTÀ SOTTILI:
Isaura, Zenobia, Armilla, Sofronia, Ottavia
(Sc) LE CITTÀ E GLI SCAMBI:
Eufemia, Cloe, Eutropia, Ersilia, Smeraldina
(Oc) LE CITTÀ E GLI OCCHI:
Valdrada, Zemrude, Bauci, Fillide, Moriana
(No) LE CITTÀ E IL NOME:
Aglaura, Leandra, Pirra, Clarice, Irene
(Mo) LE CITTÀ E I MORTI:
Melania, Adelma, Eusapia, Argia, Laudomia
(Ci) LE CITTÀ E IL CIELO:
Eudossia, Bersabea, Tecla, Perinzia, Andria
(Co) LE CITTÀ CONTINUE:
Leonia, Trude, Procopia, Cecilia, Pentesilea
(Na) LE CITTÀ NASCOSTE:
Olinda, Raissa, Marozia, Teodora, Berenice

In molti commenti si legge che 55 è somma dei primi dieci numeri, insomma quello che i matematici chiamano numero triangolare. Come disporre sul triangolo le città?

A leggere l'indice del libro sembra esserci solo una gran confusione, ma non dimentichiamo che lo scrittore sta giocando con il lettore. Mettendoci alla prova giungiamo a quel sottile piacere della scoperta aritmetica comprendendo lo schema dell'indice già analizzato in [4] e [5].

L'indice dei primi due capitoli dà un triangolo. Le prime quattro righe, 10 città, costituiscono il primo capitolo, la quinta riga il secondo. Ma le città della memoria sono terminate. Per la sesta riga abbiamo due scelte: continuare a leggere l'indice e affidare solo al primo capitolo la triangolarità o lasciare uno spazio vuoto sotto Me5. La città successiva nell'indice è infatti De5. Se poniamo De5 sotto Me5 tutta la consequenzialità verticale si rompe. Quindi è meglio lasciare lo spazio vuoto. Il capitolo 3 contiene 5 città, dalla struttura precedente indoviniamo che le prime quattro sono De5, Se4, So2, Sc1, ne occorre una nuova, arriva Oc1. E chiaro che cè una città in più che si sta costruendo: il libro stesso.

Inserendo tutto l'indice, andando a capo a fine capitolo e lasciando uno spazio vuoto, fino al pe-

Me1
Me2 De1
Me3 De2 Se1
Me4 De3 Se2 So1
Me5 De4 Se3 So2 Sc1

Figura 1: *Indice a forma di scalinata (a).*

Me1
Me2 De1
Me3 De2 Se1
Me4 De3 Se2 So1
Me5 De4 Se3 So2 Sc1
De5 Se4 So3 Sc2 Oc1
Se5 So4 Sc3 Oc2 No1
So5 Sc4 Oc3 No2 Mo1
Sc5 Oc4 No3 Mo2 Ci1
Oc5 No4 Mo3 Ci2 Co1
No5 Mo4 Ci3 Co2 Na1
Mo5 Ci4 Co3 Na2
Ci5 Co4 Na3
Co5 Na4
Na5

Figura 2: *Indice a forma di scalinata (b).*

nultimo capitolo il gioco funziona: le città dello stesso tipo appaiono in verticale, e viene fuori una scala, di cui tanto si è scritto come chiave di lettura del romanzo. L'ultimo capitolo contiene 10 città che consentono di completare la progressione verticale andando a capo e lasciando sempre uno spazio iniziale (Fig. 1 e 2).

Adesso la scala è doppia, come se il lettore che ha percorso la prima possa tornare indietro a quel primo capitolo di altrettante 10 città. Anche 10, come 15, è un numero triangolare, il più famoso essendo usato nel simbolo pitagorico del tetraktys.

Se infine capovolgessimo gli ultimi due capitoli negli spazi vuoti sotto i capitoli 3-7 avremmo l'evidenza della triangolarità di 55, ovvero la disposizione triangolare del libro con 11 righe, 11 viaggi di Marco Polo non uniformi, sempre più lunghi. Per un matematico una bella disposizione è quella che ricorda il triangolo di Tartaglia, o Pascal che dir si voglia (Fig. 3 e 4). Non a caso

Me1
Me2 De1
Me3 De2 Se1
Me4 De3 Se2 So1
Me5 De4 Se3 So2 Sc1
Na5 De5 Se4 So3 Sc2 Oc1
Na4 Co5 Se5 So4 Sc3 Oc2 No1
Na3 Co4 Ci5 So5 Sc4 Oc3 No2 Mo1
Na2 Co3 Ci4 Mo5 Sc5 Oc4 No3 Mo2 Ci1
Na1 Co2 Ci3 Mo4 No5 Oc5 No4 Mo3 Ci2 Co1

Figura 3: *Indice a forma di triangolo (a).*

Me1
Me2 De1
Me3 De2 Se1
Me4 De3 Se2 So1
Me5 De4 Se3 So2 Sc1
Na5 De5 Se4 So3 Sc2 Oc1
Na4 Co5 Se5 So4 Sc3 Oc2 No1
Na3 Co4 Ci5 So5 Sc4 Oc3 No2 Mo1
Na2 Co3 Ci4 Mo5 Sc5 Oc4 No3 Mo2 Ci1
Na1 Co2 Ci3 Mo4 No5 Oc5 No4 Mo3 Ci2 Co1

Figura 4: *Indice a forma di triangolo (b).*

55 è un numero anche di Fibonacci, ma pensare che Calvino lo abbia scelto per questo è come asserire che Castel del Monte è tutto basato sulla sequenza ricorsiva più famosa perché i suoi lati, escluso quello principale sono appunto 55. Ai

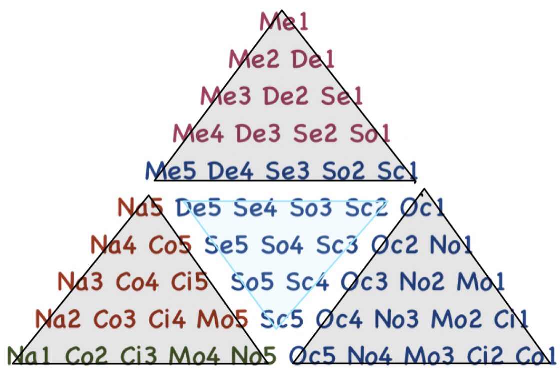

Figura 5: *Indice a forma di sviluppo di poliedro (a).*

numeri non bisogna far dire troppo altrimenti non dicono nulla. Potremmo per esempio dire che 55=15+15+15+10 ma anche 55= 4x10+3x5. Nel primo caso avremmo suddiviso il triangolo in uno centrale di 10 città e tre laterali da 15 città.Se invece si vogliono evidenziare 4 tetraktys

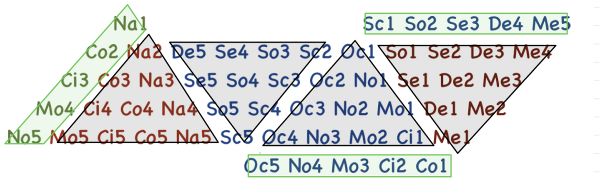

Figura 6: *Indice a forma di sviluppo di poliedro (b).*

capovolgiamo ancora i primi e ultimi due capitoli e tre capitoli restano esclusi dal disegno di un parallelogramma, quel disegno che può divenire nuova lettura (Fig. 5 e 6). Queste due possibili suddivisioni ci portano a rappresentare il libro secondo la frase dell'autore ligure che troviamo nella introduzione:

> "Questo è un libro fatto a poliedro, e di conclusioni ne ha un po' dappertutto, scritte lungo tutti i suoi spigoli."

La prima disposizione è lo sviluppo piano di una piramide triangolare retta. Le città dello stesso tipo sono ancora scritte in successione passando da una faccia all'altra. Il libro ha cambiato dimensione è diventato volume e anche Calvino sorriderebbe di questo bisenso.

La seconda possibile configurazione ricorda lo sviluppo piano di un tetraedro. Si guadagna in regolarità e stabilità ma tre capitoli scompaiono nelle alette necessarie per incollare le facce. Ma possono scomparire le città invisibili? Non sta forse proprio nella loro invisibilità la loro permanenza? Il termine invisibile non compare frequentemente nel testo, ad un punto Kublai Kan lascia intendere che è invisibile la ragione perché una città viva e riviva ogni giorno. Un collante dunque, come nelle alette del tetraedro.

Ritengo più naturale che il poliedro sia la piramide la cui altezza cade sul triangolo delle dieci città rendendo So4, Sofronia, un punto di equilibrio. Peccato che proprio questa città viene continuamente smontata e rimontata, così il lettore deve fare con il libro stesso. Nella scala invece la città centrale è Bauci perché si trova nel posto 3 della riga 8, contando sia dall'alto che dal basso, sia da destra che da sinistra, insomma in una simmetria particolare. Calvino però scrive nell'introduzione:

> "studiosi di semiologia strutturale hanno detto che nel punto esattamente centrale del libro bisogna cercare e hanno trovato un'immagine di assenza ed hanno trovato Bauci."

Questa terza persona singolare indica un suggerimento alla comprensione del testo o un invito a complicare il gioco? La scala ha 15 righe, det-

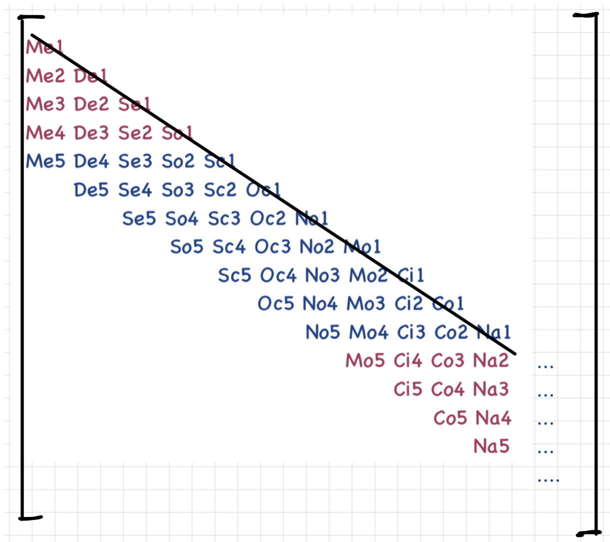

Figura 7: *Indice in forma di matrice.*

ta scacchiera sghemba e digradante dal critico Milanini [4], si può dunque inserire in una matrice 15x15 con la prima città di ciascun tipo sulla diagonale. La matrice è triangolarizzata inferiormente, sopra la diagonale gli elementi sono tutti nulli, e un altro triangolo di elementi nulli compare inferiormente. Ha quindi rango 11, e se consideriamo il romanzo come un sistema omogeneo (saranno daccordo i colleghi umanisti con questo bisenso!) allora abbiamo infinite soluzioni, infinite città che tocca al lettore scrivere, e in molti infatti hanno provato a estendere questo poema. Ma se si scrive un nuovo tipo di città allora se ne scrivono altre quattro dello stesso tipo per non interrompere il gioco e la matrice aumenta di ordine. In definitiva, Calvino ci sta raccomandando di proseguire il gioco per rendere infiniti i luoghi di incontro.

> "Il catalogo delle forme è sterminato: finchè ogni forma non avrà trovato la sua città, nuove città continueranno a nascere."

Appendice B: Classificazione delle città secondo il concetto di dimensione

Il concetto matematico di dimensione è molto più recente di quanto si possa immaginare. Una sua storia è tracciata in [6]. Sin dagli albori del pensiero scientifico, lo spazio fisico ha richiesto un numero che descrivesse la sua `dimensione`. Possiamo dire che Aristotele ed Euclide furono abbastanza concordi nell'asserire che

> "delle grandezze, quella che ha 1 dimensione è linea, quella che ne ha 2 è superficie, quella che ne ha 3 è corpo, e al di fuori di queste non si hanno altre grandezze."

Dirà anche Euclide che il punto non ha dimensione, allora, quando avremo il numero del `non avere` potremo assegnare dimensione zero al punto, dimensione 1 alle curve poiché descritte dallo scorrimento di un punto (ovvero di una punta), dimensione 2 al piano perché ottenuto facendo scorrere la retta che ha dimensione 1, dimensione 3 allo spazio che si riempie di fogli piani. Si costruisce induttivamente un universo.

Ma dal terzo secolo a.C. ad oggi la fisica stessa ha richiesto un passaggio allo spazio tempo. Così introdotta nella meccanica analitica di Lagrange a fine settecento, raccontata da Hilton un secolo dopo, la quarta dimensione non stupiva più all'inizio del novecento. Allora il discorso dimensionale passò alla matematica che generalizzato l'argomento con facilità a mondi N dimensionali diede ad ogni oggetto più coordinate e molteplici proiezioni.

Nel connubio tra matematica e fisica, a partire dalla fine dell'ottocento vengono anche introdotti i quaternioni, oggetti di dimensione pari, che estendono i numeri complessi, la loro chiave è la simmetria e la rotazione. La fisica delle particelle elementari richiese spazi infinito dimensionali.

Non sembri strano che per un matematico l'estrema generalizzazione riporti al punto di partenza. La matematica è una bizzarra materia in cui coloro che colgono i frutti parlano della forma delle radici e quel discorso modifica la coltivazione stessa, il frutto raccolto germoglia in nuove specie. Fuor di metafora, all'indomani della nascita delle geometrie non euclidee, della formalizzazione della teoria degli insiemi e della classificazione degli infiniti ci si soffermò sulla definizione di dimensione e ne nacquero nuove.

Poincarè propose la seguente definizione: un oggetto è N dimensionale se esso viene tagliato da un oggetto almeno N-1 dimensionale. Ad esempio se assumiamo che il punto abbia dimensione zero, una curva continua ha dimensione 1 perché togliendo un punto si hanno due parti disgiunte (i matematici dicono che la curva meno il punto ha due componenti connesse). Per tagliare un piano occorre invece una linea, il solo punto non basta, si raggira. Quindi il piano ha dimensione 2 perché esiste un oggetto 1 dimensionale contenuto nel piano, tale che rimosso dal piano determina un insieme con due componenti connesse.

Il lettore controlli che per tagliare lo spazio occorre un piano e non basta una retta. Ovviamente nulla verrà tagliato, per attribuire la dimensione basterà immaginare l'oggetto che taglia. Sembra di essere nella città di Isaura, laddove

> "il paesaggio invisibile condiziona quello visibile,"

invece è solo l'immaginazione razionale a creare le parole per il reale.

Tornando alla definizione di dimensione, Brouwer si restrinse ai cubi N dimensionali e li definì in modo ricorsivo guardandone la frontiera. Per passare da cubi ad altre figure occorreva un teorema di invarianza, che Brouwer stesso aveva dimostrato. Un segmento ha per frontiera i punti, dunque se il punto ha dimensione zero, il segmento ha dimensione 1. Il quadrato ha dimensione 2 poiché il suo bordo è fatto da segmenti, cioè oggetti 1 dimensionali. Il lettore verifica facilmente che il bordo del cubo 3D è fatto da quadrati. Allora si immagina il tesseratto, cubo quadridimensionale come racchiuso da cubi tridimensionali. E non è difficile immaginare anche le dimensioni superiori.

Come è vicino l'inizio del percorso alle Definizioni 3 e 6 del `Libro I degli Elementi` di Euclide: gli estremi della linea sono punti, gli estremi di una superficie sono linee. Estremi, frontiera, bordo, comunque si chiami questo concetto è il più letterario della topologia: corrisponde al confine. Forse prima di parlare di intorni e aderenza, dovremmo leggere in aula la descrizione calviniana della città di Despina città di confine tra due deserti. Perché è il confine che definisce la città, il bordo la forma. Così dice persino Euclide nelle Definizioni 13 e 16 del `Libro I degli Elementi`:

> "dicesi bordo ciò che è estremo di qualche cosa, dicesi figura ciò che è compreso da uno o più bordi".

Rispetto al rigore della geometria moderna, queste frasi sembrano confuse, ma vanno invece rilette per sentire che da sempre il *limes* è nella storia umana e anche matematica.

Queste ed altre teorie della dimensione topologica sono induttive, dunque la dimensione è un numero intero e positivo. Ma in teoria degli insiemi lo zero si costruisce dal vuoto, allora bisogna assegnare una dimensione dell'insieme vuoto, volgendo lo sguardo indietro rispetto al punto: convenzionalmente al vuoto si assegna valore -1. Paradossale che poi questa dimensione si utilizzi in statistica del linguaggio.

Una analoga intuizione, del legame tra vuoto e linguaggio, si trova nella cornice del romanzo quando Marco Polo spiega a Kublai Kan perché non parla mai di Venezia:

> "Le immagini della memoria, una volta fissate con le parole, si cancellano. Forse Venezia ho paura di perderla tutta in una volta, se ne parlo.

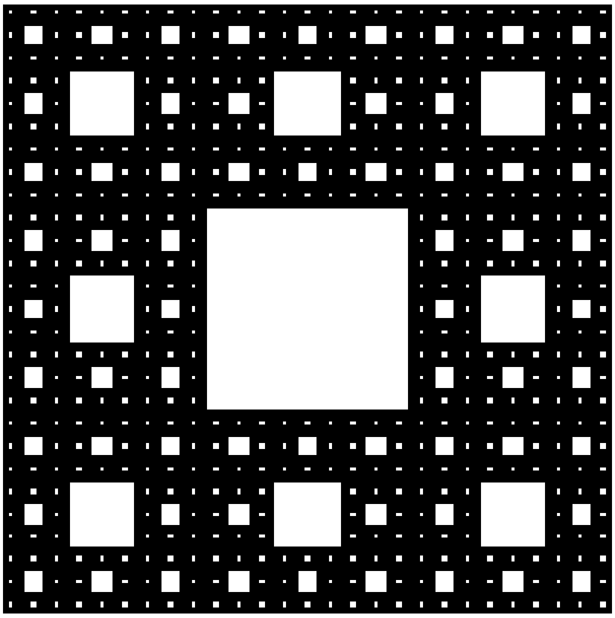

Figura 8: *Tappeto di Sierpinski*

All'inizio del novecento, con Hausdoorf invece la dimensione diventa un concetto metrico e la dimensione può non essere intera, ci sono già gli esempi di Cantor, Menger e Peano ma è l'avvento della teoria dei frattali a mostrare oggetti in cui le diverse definizioni di dimensione non coincidono. Basti pensare al tappeto di Sierpinski (Fig. 8), ottenuto svuotando un quadrato di un nono centrale, in un procedimento limite resta una rete di linee, quindi ha dimensione topologica 1, ma ha dimensione di Hausdorff pari a $\ln(8)/\ln(3)$ che tiene conto appunto dei pezzi di quadrato che ogni volta sopravvivono al taglio e della divisione dei lati che abbiamo scelto.

Ben più complicate sono le cose per l'insieme di Mandelbrot, si veda [7], (Fig. 9) e il suo bordo avvicinandosi al quale sembra di giungere nella città denominata Cecilia, il cui viaggio ricorda la tecnica del box counting e i viaggiatori non possono che constatare che ormai i luoghi si sono mescolati.

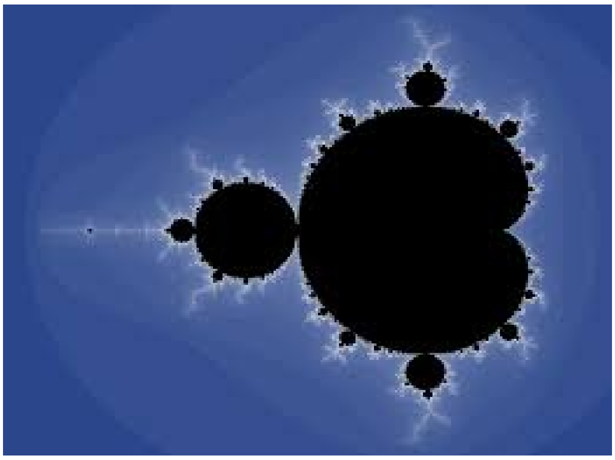

Figura 9: *Insieme di Mandelbrot*

Si può assegnare una dimensione ad ogni città visibile e invisibile. In alcuni lavori si sono classificate le città frattali e tra queste Matera attribuendone alla città dei Sassi una dimensione frattale, si veda [8].

Lo stesso Calvino nella introduzione attribuiva a Moriana la dimensione due. In questa appendice, senza specificare il motivo, si assegna ad ogni città invisibile una dimensione. Il lettore può cambiare la scelta, prediligendo la dimensione topologica a quella metrica o viceversa, le caratteristiche del confine, alla Brouwer, rispetto alle caratteristiche di connessione, alla Poincaré.

Dimensione negativa: il vuoto.
Zoe (Se3), Ipazia (Se4), Ottavia (So5), Bauci (Oc3).
Dimensione zero: il punto.
Fillide (Oc4), Trude (Co2), Olinda (Na1), Procopia (Co3).
Dimensione uno: la linea.
Isaura (So1), Armilla (So3), Cloe (Sc2), Ersilia (Sc4), Tecla (ci3), Marozia (Na3).
Dimensione due: la superficie.
Despina (De3), Leandra (No2), Eudossia (Ci1), Moriana (Oc5), Argia (Mo2).
Dimensione tre: lo spazio.
Diomira (Me1), Anastasia (De2), Irene (De5), Laudomia (Mo5).
Dimensione quattro: spazio-tempo.
Zaira (Me3), Zora (Me4), Zirma (Se2), Eufemia (Sc1), Adelma (Mo2), Clarice (No4).
Dimensione N: la classificazione.
Dorotea (De1), Tamara (Se1), ZemRude (Oc2), Bersabea (Ci2), Teodora (Na4).
Dimensione complessa: reale e immaginario.
Fedora (De4), Valdrada (Oc1), Sofronia (So4), Aglaura (No1), Eusapia (Mo3), Perinzia (Ci4), Raissa (Na2), Andria (Ci5).
Dimensione frazionaria o frattale.
Isidora (Me2) frattale ad albero, , Zenobia (So2) pattern reiterato, Zobeide (De5) gomitolo, Eutropia (Sc3) gerla di Apollonio, Pirra (No3) negativo dell'insieme di Cantor, Smeraldina (Sc5) curva di Peano, Cecilia (Co4) bordo dell'insieme di Mandelbrot, Berenice (Na5) Yin-Yang ricorsivo.
Dimensione infinita.
Maurilia (Me5), Olivia (Se5), Melania (Mo1), Leonia (Co1), Pentesilea (Co5).

In questa suddivisione, le caratteristiche di elencazione, simmetria e ricorsività sembrano dominare rispetto ad altre. Sarebbe interessante confrontare questa mia con un'altra classificazione, mi aspetto che qualche città perda dimensione perché il lettore ha visto una proiezione di quello che osservavo o viceversa possa avere dimensione maggiore perché leggendo avevo una prospettiva diversa. Oppure, alcune città, come i frattali possono avere due dimensioni: una topologica e una che tiene conto delle proprietà metriche.

> "Il filo del discorso è segreto, le loro regole assurde, le prospettive ingannevoli, e ogni cosa ne nasconde un'altra."

[1] I. Calvino: *Le città invisibili*, Oscar Mondadori, Milano (1993).

[2] S. Lucente, *Le dimensioni invisibili nella civiltà degli algoritmi*, in Atti del Convegno Log@ritmi la provocazione della Scienza 2018, Paginaria Edizioni, Polignano a mare, (2019), Ed. Alberto Maiale.

[3] G. Lolli: *Discorso sulla matematica*, Bollati Boringhieri, Torino (2011).

[4] C. Milanini: *L'utopia discontinua. Saggio su Calvino*, Garzanti, Milano (1990).

[5] P. Alessandrini *La matematica invisibile di Calvino* dal blog Mr. Palomar, 18/09/2011.

[6] T. Crilly, D. M. Johnson: *The emergence of topological dimension theory, in History of topology*, North-Holland, Amsterdam (1999)., Ed. I.M. James, p. 1-24.

[7] B. Mandelbrot: *The Fractal Geometry of Nature*, WH Freeman, New York (1982).

[8] S. Lucente: *Matera in Many Dimensions*, Heritage, 2019 (2) 380.

Sandra Lucente: è docente di Analisi Matematica presso il Dipartimento Interateneo di Fisica dell'Università degli Studi di Bari Aldo Moro. Fa ricerca sulle equazioni alle derivate parziali di tipo iperbolico e dispersivo. Attualmente è Presidente del Museo della Matematica del Dipartimento di Matematica dellUniversità di Bari. Comunicatrice scientifica per Sapere, Maddmaths!, Prisma, La Repubblica, è anche formatrice e insegnante di comunicazione della scienza. Autrice dei testi di turismo matematico: Itinerari Matematici in Puglia, Itinerari Matematici in Basilicata per Giazira Scritture. Con una biografia di Ennio De Giorgi è coautrice di Mezzogiorno di Scienza, Dedalo Edizioni 2020.