

# La formula di de Moivre – Stirling

Carlo Sempi

Dipartimento di Matematica e Fisica Ennio De Giorgi, Università del Salento, Italy

Nel numero precedente di questa rivista Giampaolo Co' [1] ha utilizzato la formula di Stirling in una versione adeguata all'uso che se ne riprometteva. Poiché ho scoperto che molti di coloro che la usano non ne hanno mai visto una dimostrazione, in questa Lezione mancata ne dò una dimostrazione completa, seguendo quella data da Robbins [2]. In primo luogo un commento sul nome: l'ho chiamata formula di de Moivre–Stirling anche se è comunemente detta formula di Stirling. Tuttavia essa è essenzialmente dovuta a de Moivre; l'importante contributo di Stirling si limita al calcolo della costante  $\sqrt{2\pi}$ . Si veda in proposito [3].

da questa relazione, sommando per  $j = 1, 2, \dots, n$ , scende

$$\int_0^n \ln x \, dx < \ln n! < \int_1^{n+1} \ln x \, dx$$

onde, poiché  $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + c$ ,

$$n \ln n - n < \ln n! < (n + 1) \ln(n + 1) - n.$$

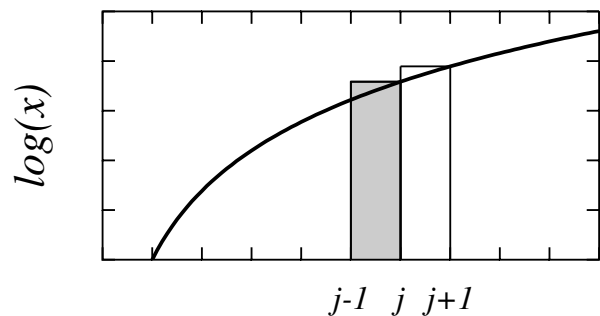


Figura 1

La formula dà una stima asintotica di  $n!$ , o, ciò che è lo stesso, di  $\ln n!$ . Ora  $\ln n! = \ln \prod_{j=1}^n j = \sum_{j=1}^n \ln j$ ; d'altro canto, poiché  $x \mapsto \ln x$  è una funzione strettamente crescente, come illustrato nella Figura 1, risulta

$$\int_{j-1}^j \ln x \, dx < [j - (j - 1)] \ln j < \int_j^{j+1} \ln x \, dx;$$

Questa doppia diseuguaglianza suggerisce di paragonare  $\ln n!$  alla media aritmetica del primo

e dell'ultimo termine. Tale media è

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2} [n \ln n - n + (n+1) \ln(n+1) - n] \\ &= \frac{1}{2} \left[ n \ln n - 2n + (n+1) \ln n \right. \\ &\quad \left. + (n+1) \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right] \\ &= \left( n + \frac{1}{2} \right) \ln n - n + a_n, \end{aligned}$$

ove

$$a_n := \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n + \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right),$$

che tende a 1/2 al tendere di  $n$  a  $+\infty$ . Si studierà così la differenza

$$s_n := \ln n! - \left( n + \frac{1}{2} \right) \ln n + n. \quad (1)$$

Ora, è

$$\begin{aligned} s_n - s_{n+1} &= \ln n! - \left( n + \frac{1}{2} \right) \ln n \\ &\quad + n - \ln(n+1)! \\ &\quad + \left( n + \frac{1}{2} \right) \ln(n+1) \\ &\quad + \ln(n+1) - n - 1 \\ &= \left( n + \frac{1}{2} \right) \ln \frac{n+1}{n} - 1; \end{aligned}$$

e poiché

$$\frac{n+1}{n} = \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}},$$

si ha

$$s_n - s_{n+1} = \frac{1}{2} (2n+1) \ln \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}} - 1. \quad (2)$$

Com'è noto, per  $|t| < 1$  vale il seguente sviluppo in serie

$$\begin{aligned} \ln(1+t) &= t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \dots \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n}, \end{aligned} \quad (3)$$

dal quale, sostituendo  $-t$  a  $t$ , si ricava

$$\ln(1-t) = -t - \frac{1}{3}t^3 - \dots = - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{t^n}{n}. \quad (4)$$

Sottraendo la (4) dalla (3) si ottiene

$$\ln \frac{1+t}{1-t} = 2 \left( t + \frac{1}{3}t^3 + \dots \right) = 2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{2j+1}}{2j+1}.$$

In virtù di quest'ultima relazione, la (2) si può scrivere nella forma

$$\begin{aligned} s_n - s_{n+1} &= (2n+1) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)(2n+1)^{2j+1}} - 1 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)(2n+1)^{2j}} \\ &= \frac{1}{3(2n+1)^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{3}{(2j+3)(2n+1)^{2j}}. \end{aligned} \quad (5)$$

I termini di quest'ultima serie sono maggiorati dai termini della serie geometrica di ragione  $(2n+1)^{-2} < 1$  (per  $n > 2$ ); scende così dalla (5)

$$\begin{aligned} 0 < s_n - s_{n+1} &< \frac{1}{3(2n+1)^2} \frac{1}{1 - (2n+1)^{-2}} \\ &= \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^2 - 1} \\ &= \frac{1}{12(n^2+n)} = \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Si vede, intanto, che la successione  $(s_n)$  è decrescente, e, perciò, ammette limite  $\xi \geq -\infty$ ; d'altro canto, pure dalla (6), scende

$$s_n - \frac{1}{12n} < s_{n+1} - \frac{1}{12(n+1)}$$

e, pertanto, la successione  $(s_n - 1/12n)$  è crescente ed ammette perciò limite. Di conseguenza, esiste finito  $\xi := \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ . Segue allora dalla (1) che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{(n/e)^n e^{\xi} \sqrt{n}} = 1,$$

onde

$$n! = e^{\xi} n^n \sqrt{n} e^{-n} e^{\theta_n}. \quad (7)$$

L'eq.(7) è già sufficiente per molte applicazioni: mancano il valore della costante  $e^{\xi}$  e la sti-

ma dell'errore che si commette sostituendo a  $n!$  l'espressione  $e^\xi n^n \sqrt{n} e^{-n}$ . Incominciamo subito dalla stima dell'errore. Dimostriamo ora che  $0 < \theta_n < \frac{1}{12n}$ .

Si ricava dalla (5) che

$$s_n - s_{n+1} > \frac{1}{3(2n+1)^2} > \frac{1}{12(n+1)} - \frac{1}{12(n+2)}$$

e, di qui, che la successione  $(s_n - \frac{1}{12(n+1)})$  decresce. Poiché si è visto che  $(s_n - \frac{1}{12n})$  cresce, si ha la doppia disequaglianza

$$\xi + \frac{1}{12(n+1)} < s_n < \xi + \frac{1}{12n}$$

sicché, tenendo conto della (1), riesce

$$\begin{aligned} e^\xi n^n \sqrt{n} e^{-n} \exp\left(\frac{1}{12(n+1)}\right) &< n! \\ &< e^\xi n^n \sqrt{n} e^{-n} \exp\left(\frac{1}{12n}\right). \end{aligned}$$

Ciò mostra che nella (7) è  $0 < \theta_n < \frac{1}{12n}$ .

Il modo piú semplice per calcolare la costante  $e^\xi$  consiste nell'utilizzare la (7) per l'approssimazione dei termini della distribuzione binomiale

$$\begin{aligned} p_{n,k} = \mathbb{P}(S_n = k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &(k = 0, 1, \dots, n) \end{aligned}$$

che è la probabilità  $\mathbb{P}(S_n = k)$  di ottenere  $k$  volte testa lanciando  $n$  volte una moneta per la quale è  $p$  la probabilità di testa. La variabile aleatoria  $S_n$ , che conta il numero di teste in  $n$  lanci, ha media  $\mathbb{E}(S_n) = np$  e varianza  $V(S_n) = np(1-p)$ . Riducendo o, come spesso dicono i fisici, *standardizzando*, la variabile aleatoria  $S_n$

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

e ignorando il fattore di correzione  $e^{\theta_n}$  che tende uniformemente a 1, si arriva all'espressione

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) \\ = \frac{1}{e^\xi} \int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx. \end{aligned}$$

Quest'ultima equazione è il contenuto del teorema integrale di de Moivre–Laplace. Ovviamente, si deve avere

$$\mathbb{P}(S_n \in \mathbb{R}) = 1 = \frac{1}{e^\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

ciò che porta al valore della costante di normalizzazione  $e^\xi = \sqrt{2\pi}$ . Abbiamo così la formula di de Moivre–Stirling

$$n! = \sqrt{2\pi} n^n \sqrt{n} e^{-n} e^{\theta_n} \quad \left(\theta_n \in \left]0, \frac{1}{12n}\right[ \right).$$



- [1] G. Co': "La lezione mancata. Statistica, entropia e temperatura", *Ithaca XI* (2018) 125–132.
- [2] H. Robbins: "A remark on Stirling's formula", *Amer. Math. Monthly* **62** (1955) 26–29.
- [3] D.R. Bellhouse: *Abraham de Moivre: setting the stage for classical probability and its applications*. CRC Press, Boca Raton FL (2011).

