In questo numero

Il tema attorno al quale si imperniano gli articoli di questo numero è quello dei cosiddetti **Sistemi Integrabili** non lineari.

Messa in questi termini la questione sembra essere posta da specialisti a specialisti, anche rispetto alla maggioranza dei fisici e dei matematici militanti. Invece è l'ambito naturale nel quale si cerca di dare una risposta a delle domande ovvie: dopo aver scritto le equazioni del moto per un dato sistema, che informazioni possiamo ricavare?

Se scrivere le equazioni del moto significa riproporre in linguaggio matematico la descrizione del comportamento di un certo sistema, poi siamo veramente capaci di risolverle? In particolare: siamo capaci di ottenere soluzioni analitiche per qualsiasi valore delle variabili indipendenti e per tutte le condizioni iniziali ammissibili? E quali sono le condizioni perché ciò possa avvenire? Quale tipo di ordine possiamo intravedere in tali soluzioni? Quanto ci possiamo spingere in questo tipo di analisi? Ovvero, quali sono i limiti a priori che la Natura, l'osservazione, e la Matematica ci impongono in questa impresa? Quanto della ricchezza e della complessità del fenomeno viene perso e quanto, invece, viene estratto da un ideale territorio, fino ad oggi solo immaginato, o forse nemmeno pensato? Infine, ci sono ricadute pratiche (nel senso scientifico e tecnologico dell'espressione) di tali ricerche?

Le ricerche nel campo dei Sistemi Integrabili non fanno riferimento ad uno specifico settore delle Scienze, ma hanno un carattere metodologico generale. Il loro scopo è quello di produrre una rete di modelli e metodi interpretativi e predittivi, esattamente come i radio-fari della navigazione aerea, nel mare ribollente di tutti i possibili modelli che ci si possa inventare.

Per quanto speciali e peculiari essi siano, i Sistemi Integrabili insegnano qualcosa di assolutamente generale: strutture stabili nella dinamica dei sistemi emergono e si instaurano senza bisogno di ricorrere a forme di sostegno esterno. Esse si auto-organizzano e persistono, senza che si possano decomporre in strutture più semplici ed elementari. Nessun calcolo perturbativo ne può riprodurre efficacemente le caratteristiche.

Perciò il destino di tale campo di ricerche non è quello di formare un corpus autonomo di conoscenze, come la Fisica delle Particelle Elementari o la Fisica della Materia. Piuttosto, i suoi risultati si diffondono e vengono utilizzati in tutti i rami della conoscenza. La interiorizzazione di tali idee da parte delle varie comunità scientifiche può essere lenta, ma ampiamente e inesorabilmente in atto.

La foto che presentiamo in questa introduzione si riferisce al convegno internazionale, ultimo in ordine di tempo di una lunga serie, Physics and Mathematics of Nonlinear Phenomena, organizzato nel 2017 dal gruppo di studio sui sistemi nonlineari del Dipartimento di Matematica e Fisica Ennio De Giorgi dell'Università del Salento. Il convegno ha celebrato il 50^0 anniversario della scoperta del *Metodo della Trasformata Spettrale Inversa*, che ha profondamente inciso sullo sviluppo delle ricerche in questo settore. È stata anche l'occasione per commemorare il Prof. L. Faddeev, scomparso pochi mesi prima, che è stato uno dei massimi studiosi dei sistemi integrabili classici e quantistici.

Di questi aspetti generali se ne trova un resoconto nel contributo di Luigi Martina, che costituisce una rassegna introduttiva delle motiva-

Figura 1: *Foto di gruppo della conferenza Physics and Mathematics of Nonlinear Phenomena 2017 tenutosi a Gallipoli (Le) dal 17 al 22 Giugno 2017.*

zioni e delle ricerche, che hanno condotto alla teoria dei Sistemi Integrabili. Viene illustrato brevemente il concetto chiave di Integrabilità per i Sistemi Hamiltoniani e viene discusso il concetto generale di *Solitone*. Illustrando alcuni esempi, ormai dei classici della Fisica Matematica, vengono introdotti il metodo della Trasformata Spettrale Inversa (IST) e le Trasformate di Bäcklund. Il testo intende costituire una cornice delle tematiche più specifiche affrontate nei contributi successivi.

L'articolo di Davide Guzzetti si concentra su una classe particolare di equazioni differenziali del secondo ordine, non lineari e a coefficienti variabili, dette di *Painlevé*. All'inizio del XX secolo esse furono classificate rispetto alle proprietà delle loro singolarità nel piano complesso della variabile indipendente, con lo scopo di trovare nuove funzioni speciali. E in effetti lo scopo è stato raggiunto, ma le dimostrazioni e le procedure di rappresentazione hanno richiesto un intero secolo di lavoro. Guzzetti ripercorre questo straordinario viaggio, ponendo l'accento sia sulla centralità di queste equazioni in tutti i problemi contemporanei relativi ai fenomeni non lineari, dai modelli statistici al calcolo dei blocchi conformi in teoria delle stringhe, sia su una differente nozione di integrabilità.

Il contributo di Yuji Kodama si concentra sui metodi algebrici combinatori di classificazione delle soluzioni solitoniche dell'equazione di *Kadomtsev - Petviashvili di tipo II*. A dispetto dell'esotico nome, questa equazione emerge in una varietà di situazioni fisiche e matematiche estremamente vasta e, in particolare, costituisce la prima deformazione non lineare per descrivere le onde del mare poco profondo. Perciò il suggerimento da dare al lettore è di procurarsi l'articolo di Kodama, una macchina fotografica, ed andare al lido marino più vicino. Questo tenendo comunque a mente che le stesse onde si ritrovano come perturbazioni del campo gravitazionale in prossimità dell'orizzonte degli eventi di un buco nero.

Per rimanere nell'ambito marino, Petr Giorgievich Grinevich e Paolo Maria Santini trattano invece di *Onde Anomale*, le quali si possono studiare con gli stessi metodi analitici dei solitoni.

La lettura stimola a comprendere quanto possa essere nascosta l'origine di *fenomeni estremi* e quanto di essi si possa dare una descrizione quantitativa. Osservazioni in Natura e in laboratorio confermano la universalità dei concetti esposti.

Il lavoro di Decio Levi sviluppa l'idea che se un certo problema ha diverse soluzioni, allora queste si possono collegare tra loro in maniera esplicita. In termini differenti si dice che al problema è associata una certa famiglia di operazioni, dette *Simmetrie*, che collegano le soluzioni tra di loro. Applicando questo concetto alle equazioni differenziali, si sono elaborati metodi per concretizzare ed utilizzare questa idea. Questo ha portato a introdurre concetti centrali nella Matematica, quali le algebre e i gruppi di Lie di simmetrie puntuali e simmetrie generalizzate di Lie-Bäcklund. Tali concetti sono stati utilizzati ampiamente in Matematica ed in Fisica, tanto che la procedura abituale consiste nell'assumere a priori un certo numero di simmetrie per il sistema. Tuttavia il loro studio sistematico per un generico sistema non lineare ha richiesto due sviluppi disponibili solo nell'ultimo quarto del XX secolo: i metodi di classificazioni di algebre e sotto-algebre e lo sviluppo del calcolo simbolico al computer. Le ricadute di tali metodologie sono state di grande impatto nello studio dei sistemi integrabili.

Nel suo articolo, Antonio Moro ha invece affrontato la descrizione classica delle *transizioni di fase* dal punto di vista dei sistemi integrabili. In particolare emerge come il diagramma di fase di un sistema termodinamico sia strettamente collegato con le soluzioni di tipo *Onde di Shock* (d'urto) di alcuni sistemi integrabili, quali l'*equazione di Burgers* linearizzabile con un cambio locale di variabili. Infatti, interpretando tale equazione, e sue generalizzazioni, come equazioni di stato in forma differenziale, si possono far corrispondere i gradini presenti negli shock con le discontinuità delle grandezze termodinamiche nelle regioni di transizione di fase. Questo punto di vista fa presagire nuovi possibili sviluppi in varie direzioni, menzionate nel testo, della ricerca scientifica.

Già scorrendo questa introduzione il lettore si accorgerà che l'espressione integrabile è stata usata con almeno quattro connotazioni leggermente diverse: non potevamo quindi farci mancare la *super-integrabilità*, che viene discussa da Danilo Riglioni. Il prefisso super, vagamente supponente, esprime alla fine un fatto elementare: alcuni sistemi meccanici hanno traiettorie chiuse per un insieme continuo di condizioni iniziali. Questa proprietà non è tanto comune e, in effetti, solo pochi sistemi la ammettono: i più tipici sono i sistemi Kepleriani e qualli armonici isotropi. Quale sia l'origine di questo peculiare comportamento, come si caratterizzi, e sopratutto, se sia possibile trovarne di nuovi è il tema del lavoro.

Il numero si chiude con *La lezione mancata* di Giampaolo Co', riguardante la relazione tra Entropia e Temperatura.

Auguriamo una buona lettura,
il Comitato di Redazione.